Herzlich willkommen zur Demo der
mathepower.de – Aufgabensammlung

Um sich schnell innerhalb der ca. 350.000 Mathematikaufgaben zu orientieren, benutzen Sie unbedingt das

Lesezeichen

Ihres Acrobat–Readers: Das Icon finden Sie in der links stehenden Leiste.

Bitte beachten Sie:
Im Original können Sie alle einzelnen Dateien als WORD–, pdf– oder Open–Office–Dokument aufrufen.

Die aktuellen Preise entnehmen Sie bitte unserer homepage. Weitere Fragen beantworten wir Ihnen gerne unter ☎ 04639 98360.

Michael Lobsien
Geschäftsführer mathepower.de

Abbildungen und Transformationen 1 – 9

Aufgabe:	**Lernvoraussetzungen:**
Aufgabe 01	1. Die Konstruktionsvorschrift einer Abbildung auf Punkte anwenden. 2. Die Bilder der Koordinatenachsen an Hand der Konstruktionsvorschrift ermitteln. 3. Aus der Konstruktionsvorschrift die Abbildungsmatrix bestimmen. 4. Die Flächentreue der Abbildung nachweisen. 5. Die Fixpunkte der Abbildung berechnen.
Aufgabe 02	1. Die Konstruktionsvorschrift einer Abbildung auf Punkte anwenden. 2. Aus der Konstruktionsvorschrift die Abbildungsmatrix und den Typ der Abbildung bestimmen.
Aufgabe 03	1. Die Konstruktionsvorschrift einer Abbildung auf Punkte anwenden. 2. Die Bilder des Ursprungs und der Koordinatenachsen an Hand der Konstruktionsvorschrift ermitteln. 3. Aus der Konstruktionsvorschrift die Abbildungsmatrix bestimmen. 4. Die Fixpunkte der Abbildung berechnen.
Aufgabe 04	1. Die Bilder des Ursprungs und der Koordinatenachsen an Hand der Konstruktionsvorschrift und analytisch ermitteln. 2. Aus der Konstruktionsvorschrift die Abbildungsmatrix bestimmen. 3. Die Fixpunkte und Fixgeraden der Abbildung berechnen. 4. Die Abbildungsmatrix der Achsenspiegelung kennen. 5. Verkettungen von Abbildungen bestimmen. 6. Die inverse Abbildungsmatrix berechnen.
Aufgabe 05	1. Aus drei Punkten und ihren Bildpunkten die Abbildungsgleichung der affinen Abbildung ermitteln. 2. Fixpunkte und Fixgeraden der Abbildung bestimmen. 3. Eine Drehung des Koordinatensystems vornehmen und die Transformationsgleichungen bestimmen. 4. Die affine Abbildung auf das gedrehte System übertragen. 5. Das Flächenverhältnis eines Dreiecks und Bilddreiecks berechnen.

Aufgabe 06	1. Eine Abbildung auf Fixpunkte und Fixgeraden untersuchen. 2. Koordinaten von Bildpunkten berechnen. 3. Den Affinitätsmaßstab bestimmen. 4. Die Abbildung geometrisch klassifizieren. 5. Eine Drehung des Koordinatensystems vornehmen und die Transformationsgleichungen bestimmen.
Aufgabe 07	1. Die Eigenschaften einer perspektiven Affinität wissen und zur Konstruktion ausnutzen. 2. Aus der Vorgabe der Affinitätsachse und eines zugeordneten Punktepaares die Abbildungsgleichung bestimmen. 3. Bilder von Geraden berechnen. 4. Die perspektive Affinität in eine Achsenspiegelung und eine weitere Abbildung zerlegen.
Aufgabe 08	1. Die Eigenschaften von Kongruenzabbildungen wissen und anwenden. 2. Verschiedene Kongruenzabbildungen klassifizieren. 3. Den Drehwinkel und den Drehpunkt bestimmen. 4. Die Spiegelachse einer Achsen- und Schubspiegelung berechnen. 5. Den Verschiebungsanteil einer Schubspiegelung ermitteln.
Aufgabe 09	1. Eine Abbildung als Schrägspiegelung nachweisen und die Bestimmungsstücke berechnen. 2. Die Verkettung von 2 Schrägspiegelungen durchführen. 3. Die Verkettung auf Punkte anwenden. 4. Die Verkettung als Scherung nachweisen. 5. Den Scherungswinkel berechnen.

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 01

Eine affine Abbildung ist durch ihre Konstruktionsvorschrift definiert:

- Gegeben ist die Gerade g mit $y = 2 \cdot x$.

  Einem Punkt P wird nach der folgenden Vorschrift ein Bildpunkt P‘ zugeordnet:
- Die Parallelen durch P zur x- bzw. y-Achse schneiden die Gerade g in den Punkten S bzw. F.
- Die Parallelen durch S zur y-Achse und durch F zur x-Achse schneiden sich in P‘.

a) Bilden Sie das Dreieck mit den Eckpunkten P(–1 | 2), Q(4 | 4) und R(–2 | 8) ab.

b) Begründen Sie an Hand der Konstruktionsvorschrift:

(1) Der Ursprung ist Fixpunkt.

(2) Die x-Achse wird auf die y-Achse abgebildet und umgekehrt.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsgleichung.

d) Zeigen Sie, dass die Abbildung flächentreu ist, und bestätigen Sie die Flächentreue am Beispiel des Dreiecks PQR.

e) Zeigen Sie, dass die Gerade g eine Fixpunktgerade ist.

f) Beschreiben Sie die vorliegende Abbildung geometrisch.

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 02

Eine affine Abbildung ist durch eine Konstruktionsvorschrift definiert:

Einem Punkt P wird durch die folgende Vorschrift ein Bildpunkt P‘ zugeordnet:

- Der Spiegelpunkt von P bezüglich der x-Achse sei S.
- Der Fußpunkt des Lotes von P auf die y-Achse sei T.
- P‘ ist der Schnittpunkt der Geraden OP und ST.

a) Bilden Sie das Dreieck mit den Eckpunkten P(6 | –3), Q(5 | 6) und R(3 | 6) ab.

b) Begründen Sie an Hand der Konstruktionsvorschrift, dass es sich bei der Abbildung um eine zentrische Streckung handelt. Geben Sie die Abbildungsgleichung an.

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 03

Eine affine Abbildung ist durch eine Konstruktionsvorschrift definiert:

- Gegeben ist der Punkt S(0 | 8).

  Einem Punkt P wird durch die folgende Vorschrift ein Bildpunkt P‘ zugeordnet:

- Der Punkt T liegt auf der Parallelen durch P zur y-Achse in dreifachem Abstand zur x-Achse wie P.
- P‘ ist derjenige Punkt, der die Strecke ST halbiert.

a) Bilden Sie das Dreieck PQR mit P(–2 | 1), Q(4 | 0) und R(6 | 4) auf das Dreieck P’Q’R‘ ab.

b) Bestimmen Sie an Hand der Konstruktionsvorschrift die Bilder

(1) des Ursprungs O und

(2) der Koordinatenachsen.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsgleichung.

d) Berechnen Sie die Fixpunkte der Abbildung.

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 04

Eine affine Abbildung Ω ist durch eine Konstruktionsvorschrift definiert:

- Gegeben sind die Gerade a mit $y = -2 \cdot x$ und zwei zugeordnete Punkte A(–4 | 2) und A‘(6 | –6).

  Einem Punkt P wird nach der folgenden Vorschrift ein Bildpunkt P‘ zugeordnet:
- Der Schnittpunkt der Geraden AP mit a sei F.
- Der Schnittpunkt der Geraden A’P mit a sei S.
- P‘ ist der Schnittpunkt der Geraden A’F und AS.

a) Konstruieren Sie die Bilder der Koordinatenachsen.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsgleichung der Abbildung Ω und zeigen Sie, dass diese flächentreu ist.

(Ergebnis: $\overrightarrow{x'} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$)

c) Bestimmen Sie die Fixpunktgerade und die Fixgerade(n) der Abbildung Ω.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Achsenspiegelung Σ an der Geraden a.

e) Bilden Sie die Verkettungen $\Sigma * \Omega$ und $\Omega * \Sigma$ und benennen Sie den Zusammenhang der beiden Verkettungen.

f) Bestimmen Sie die Fixelemente der Verkettungen.

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 05

Eine affine Abbildung ist durch drei Punkt A(0 | 0), B(5 | 0) und C(10 | 5) sowie deren Bildpunkte A‘(0 | 0), B‘(–19 | –18) und C‘(–6 | –7) festgelegt.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsgleichung.

b) Untersuchen Sie die Abbildung auf Fixpunkte und Fixgeraden.

c) Die Gerade a sei nun die u-Achse, die zu a senkrechte Gerade die v-Achse eines kartesischen Koordinatensystems, wobei der positive Teil der y-Achse im 1. Quadranten des u,v-Systems verlaufen soll. Drücken Sie u und v durch x und y aus.

d) Überführen Sie die Abbildungsgleichung in das u,v-System, und bestimmen Sie die Art der vorliegenden Abbildung.

e) Wie verhalten sich die Flächeninhalte des Dreiecks ABC und des Bilddreiecks A’B’C‘? Bestimmen Sie das Flächenverhältnis auch direkt aus der Abbildungs-gleichung.

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 06

Durch die Abbildung $\Omega: \overrightarrow{X'} = \begin{pmatrix} 1{,}32 & -0{,}24 \\ -2{,}24 & 2{,}68 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$ wird jedem Punkt P der Punkt P‘ zugeordnet.

a) Die Abbildung besitzt eine Fixpunktgerade a. Bestimmen Sie die Gleichung.

b) Zeigen Sie, dass die Richtung PP’ von der Lage von $P \notin a$ unabhängig ist. Ermitteln Sie den Winkel, unter dem sich die Geraden a und PP’ schneiden.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes A‘ von A(10 | 5) und die Koordinaten des Schnittpunktes S von der Geraden AA‘ und a. Bestimmen Sie das Verhältnis $k = \frac{\left|\overline{A'S}\right|}{\left|\overline{AS}\right|}$.

d) Beschreiben Sie die vorliegende Abbildung geometrisch, und bestimmen Sie k aus der Abbildungsgleichung.

e) Wie lautet die Abbildung in einem kartesischen u,v-System, dass aus dem x,y-System durch eine Drehung um den Ursprung hervorgeht. Dabei soll die u-Achse mit der Geraden a zusammen fallen, und die Koordinate u_S soll positiv sein.

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 07

Von einer perspektiven Affinität Ω sind die Achse a mit der Gleichung $y = -\frac{3}{2} \cdot x$ und zwei zugeordnete Punkte A(1 | 2) und A'(–1 | 1) gegeben.

a) Konstruieren Sie die Bilder der Koordinatenachsen.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsgleichung.

c) Bestimmen Sie das Bild einer zur Achse a senkrechten Geraden, und berechnen Sie den Winkel zwischen dieser Geraden und ihrem Bild.

   Zeichnen Sie Sie die zur Achse senkrechte Gerade durch den Ursprung und ihr Bild.

d) Zerlegen Sie die Scherung in zwei Abbildungen S und Σ, so dass gilt:

$$\Omega = \Sigma * S$$

   Hierbei bedeutet S die Achsenspiegelung an a.

   Bestimmen Sie die Gleichung und den Typ der Abbildung Σ.

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 08

Vorgelegt sind die affinen Abbildungen

$T_1: \overrightarrow{X'} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $T_2: \overrightarrow{X'} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$ und

$T_3: \overrightarrow{X'} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Begründen Sie, dass es sich um Kongruenzabbildungen handelt.

b) Ermitteln Sie für die gleichsinnige Kongruenzabbildung Drehpunkt und Drehwinkel.

c) Zeigen Sie, dass sich unter den ungleichsinnigen Kongruenzabbildungen eine Achsenspiegelung und eine Schubspiegelung befindet. Geben Sie jeweils die Spiegelachse und für die Schubspiegelung den Verschiebungsvektor an.

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 09

Vorgelegt sind die Schrägspiegelung an der x-Achse

$\Phi: \overrightarrow{X'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$ und die Abbildung $\Sigma: \overrightarrow{X'} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$.

a) Zeigen Sie, dass Σ eine Schrägspiegelung mit derselben Affinitätsrichtung wie Φ ist. Bestimmen Sie die Achse und Affinitätsrichtung von Φ.

b) Bestimmen Sie die Abbildung $\Sigma * \Phi$, und konstruieren und berechnen Sie das Bild des Dreiecks ABC mit A(–4 | –1), B(2 | 0) und C(0 | 6).

c) Zeigen Sie, dass $\Sigma * \Phi$ eine Scherung ist.

d) Bestimmen Sie den Scherungswinkel.

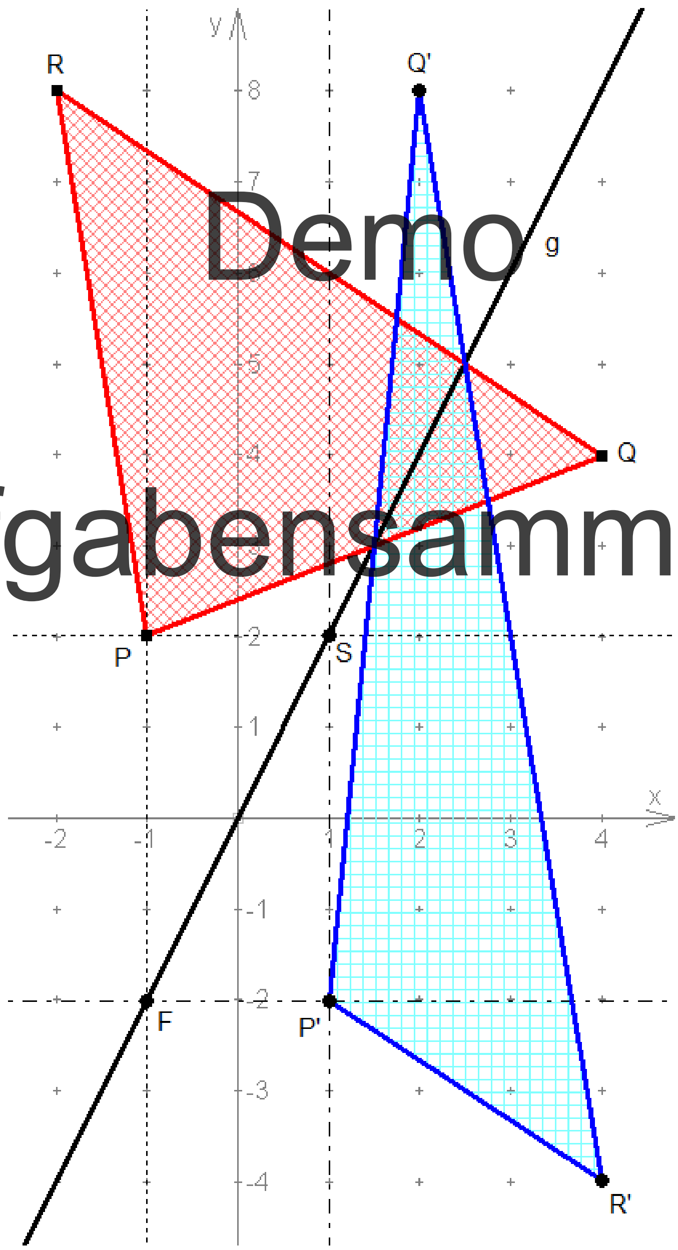
Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 01 – Lösung

Eine affine Abbildung ist durch ihre Konstruktionsvorschrift definiert:

- Gegeben ist die Gerade g mit $y = 2 \cdot x$.

  Einem Punkt P wird nach der folgenden Vorschrift ein Bildpunkt P‘ zugeordnet:
- Die Parallelen durch P zur x- bzw. y-Achse schneiden die Gerade g in den Punkten S bzw. F.
- Die Parallelen durch S zur y-Achse und durch F zur x-Achse schneiden sich in P‘.

a) Bilden Sie das Dreieck mit den Eckpunkten P(–1 | 2), Q(4 | 4) und R(–2 | 8) ab.



b) Begründen Sie an Hand der Konstruktionsvorschrift:

(1) Der Ursprung ist Fixpunkt.

(2) Die x-Achse wird auf die y-Achse abgebildet und umgekehrt.

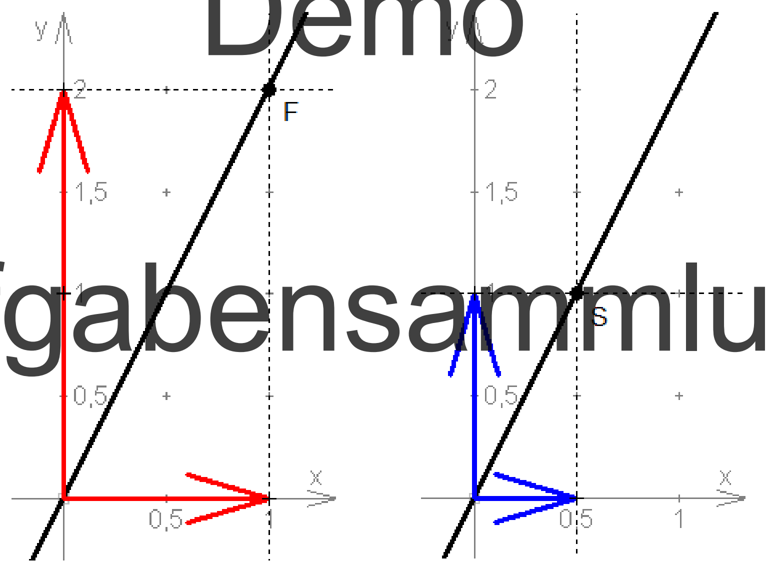
(1) Der Ursprung O mit den zugehörigen Punkten F und S fallen zusammen, da die Gerade g eine Ursprungsgerade ist. Also gilt O = O‘.

(2) Für alle Punkte P der x-Achse gilt, dass der zugehörige Punkt S der Ursprung ist. Da der Bildpunkt P‘ auf der Parallelen zur y-Achse durch S liegt, liegt P‘ in diesem Fall auf der y-Achse.

Für alle Punkte P der y-Achse gilt, dass der zugehörige Punkt F der Ursprung ist. Da der Bildpunkt P‘ auf der Parallelen zur x-Achse durch F liegt, liegt P‘ in diesem Fall auf der x-Achse.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsgleichung.

Der Einheitsvektor $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird abgebildet auf $\vec{i}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, der Einheitsvektor $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird abgebildet auf $\vec{j}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, deshalb gilt $\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$.



d) Zeigen Sie, dass die Abbildung flächentreu ist, und bestätigen Sie die Flächentreue am Beispiel des Dreiecks PQR.

Eine affine Abbildung ist flächentreu, wenn die Determinante der Abbildungsmatrix den Wert ±1 hat.

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\| = -1 \quad \text{q. e. d.}$$

Das Ergebnis soll am Beispiel des Dreiecks PQR bestätigt werden, dazu werden die Bildpunkte berechnet und die Flächeninhalte von Dreieck und Bilddreieck bestimmt.

$\vec{P'} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{Q'} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\vec{R'} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{P'Q'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{P'R'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Für den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt allgemein:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sqrt{1-\cos^2\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sqrt{1-\frac{\left(\vec{a} * \vec{b}\right)^2}{\left|\vec{a}\right|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a} * \vec{b}\right)^2}$$

Mit $\vec{a} = \overrightarrow{P'Q'}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{P'R'}$ folgt für den Flächeninhalt des Bilddreiecks:

$$A' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{101 \cdot 13 - (-17)^2} = 16 \text{ FE}$$

Entsprechend gilt mit $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ für den Flächeninhalt des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29 \cdot 37 - (7)^2} = 16 \text{ FE} \quad \text{q. e. d.}$$

e) Zeigen Sie, dass die Gerade g eine Fixpunktgerade ist.

Die Ortsvektoren aller Punkte der Geraden g haben die Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ 2 \cdot x \end{pmatrix}$. Damit folgt $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2 \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \\ 2 \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \cdot x \end{pmatrix}$ q. e. d.

f) Beschreiben Sie die vorliegende Abbildung geometrisch.

Auf Grund der bisherigen Ergebnisse handelt es sich bei der Abbildung um eine ***perspektive Affinität***, denn diese ist durch die folgenden Eigenschaften bestimmt:

1. Die Punkte einer Geraden a werden auf sich abgebildet, d. h. jede perspektive Affinität hat eine Fixpunktgerade.
2. Die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte sind parallel.

Es handelt sich sogar um eine ***Schrägspiegelung***, da

3. der Affinitätsmaßstab k = -1 (d. h. PP‘ wird von a halbiert).

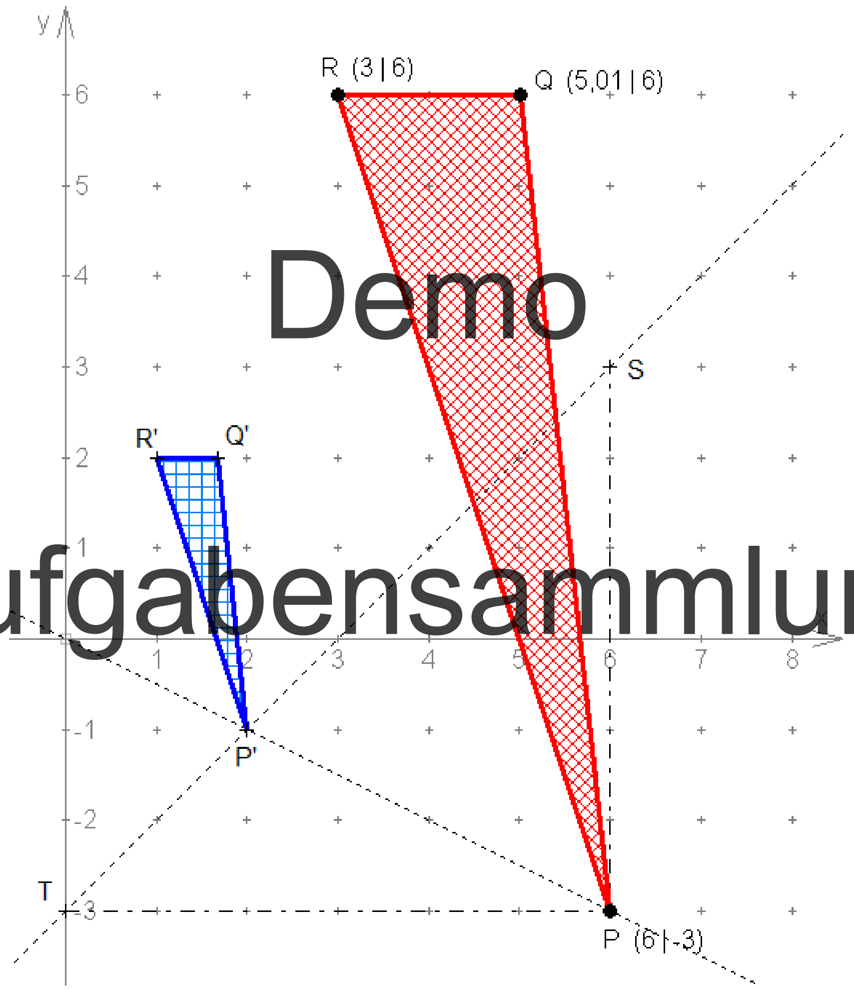
Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 02 – Lösung

Eine affine Abbildung ist durch eine Konstruktionsvorschrift definiert:

Einem Punkt P wird durch die folgende Vorschrift ein Bildpunkt P‘ zugeordnet:

- Der Spiegelpunkt von P bezüglich der x-Achse sei S.
- Der Fußpunkt des Lotes von P auf die y-Achse sei T.
- P‘ ist der Schnittpunkt der Geraden OP und ST.

a) Bilden Sie das Dreieck mit den Eckpunkten P(6 | –3), Q(5 | 6) und R(3 | 6) ab.



b) Begründen Sie an Hand der Konstruktionsvorschrift, dass es sich bei der Abbildung um eine zentrische Streckung handelt. Geben Sie die Abbildungsgleichung an.

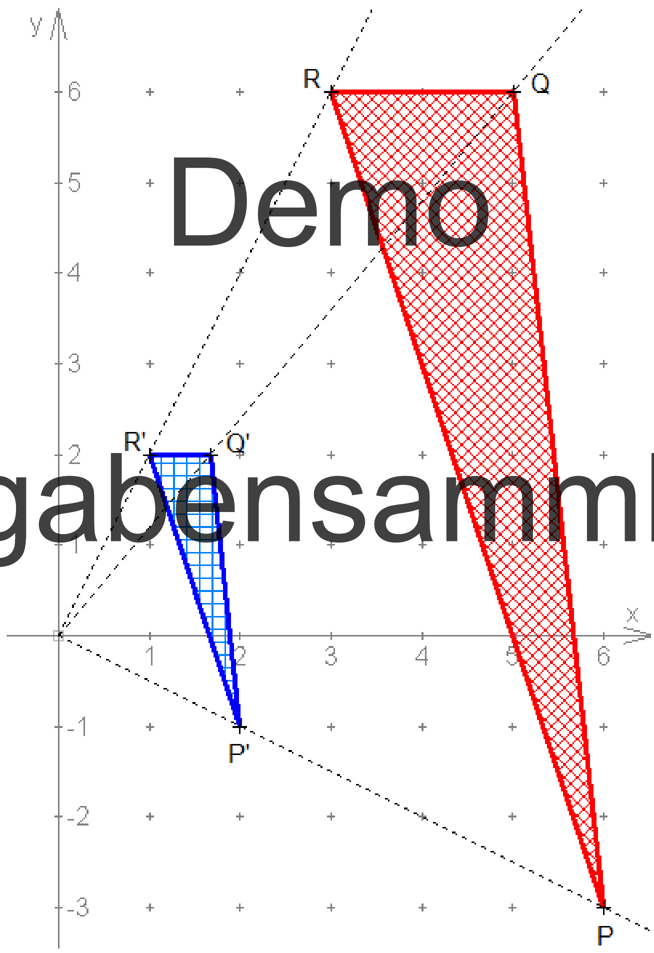
$$\text{Sei } \vec{P} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \vec{S} = \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

P‘ ist der Schnittpunkt der Geraden OP und ST:

$$g_{ST} \cap g_{OP}: \vec{T} + p\cdot\overrightarrow{ST} = q\cdot\vec{P} \Rightarrow p\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ -2\cdot y_0\end{pmatrix} + q\cdot\begin{pmatrix}-x_0\\ -y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -y_0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} x_0 & -x_0 & 0 \\ -2\cdot y_0 & -y_0 & -y_0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow p = q = \frac{1}{3}$$

Für die Abbildung eines beliebigen Punktes P gilt also $\vec{P'} = \frac{1}{3}\cdot\vec{P}$, bei der Abbildung handelt es sich um eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $\frac{1}{3}$. Die Abbildung hat daher die Gleichung $\vec{X'} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\vec{X}$.



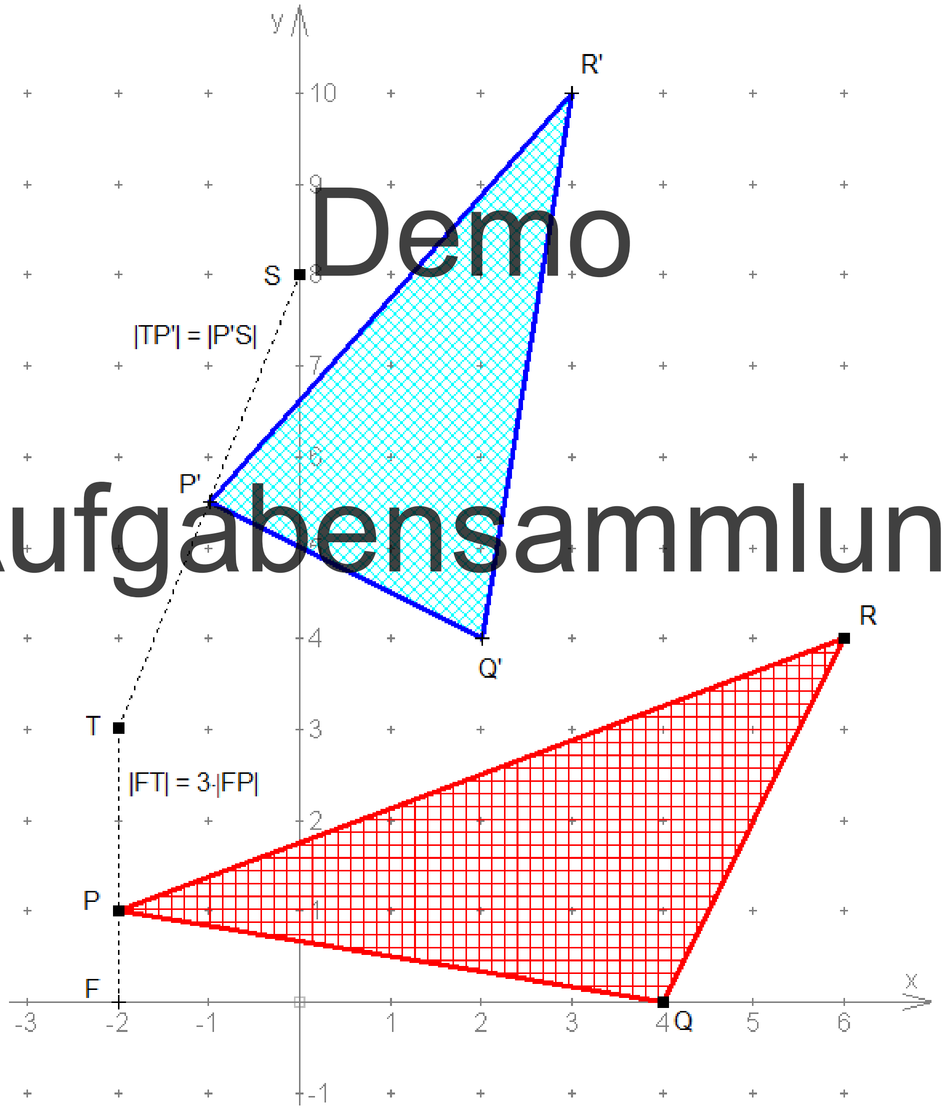
Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 03 – Lösung

Eine affine Abbildung ist durch eine Konstruktionsvorschrift definiert:

- Gegeben ist der Punkt S(0 | 8).

  Einem Punkt P wird durch die folgende Vorschrift ein Bildpunkt P‘ zugeordnet:
- Der Punkt T liegt auf der Parallelen durch P zur y-Achse in dreifachem Abstand zur x-Achse wie P.
- P‘ ist derjenige Punkt, der die Strecke ST halbiert.

a) Bilden Sie das Dreieck PQR mit P(–2 | 1), Q(4 | 0) und R(6 | 4) auf das Dreieck P’Q’R‘ ab.



b) Bestimmen Sie an Hand der Konstruktionsvorschrift die Bilder

(1) des Ursprungs O und

(2) der Koordinatenachsen.

(1) Für den Ursprung O gilt

$$O(0\,|\,0) \Rightarrow T_O(0\,|\,0) \Rightarrow \overrightarrow{O'} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OT_o} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

(2) Sei Y(0 | y) ein beliebiger Punkt der y-Achse.

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{T_Y} = \begin{pmatrix}0\\3\cdot y\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{Y'} = \overrightarrow{T_Y} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{T_YS}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix}0\\3\cdot y\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\8-3\cdot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4-\frac{3}{2}\cdot y\end{pmatrix} & \text{für } y \le \frac{8}{3} \\ \begin{pmatrix}0\\3\cdot y\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\cdot y-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{3}{2}\cdot y-4\end{pmatrix} & \text{für } y > \frac{8}{3} \end{cases}$$

d. h. die y-Achse wird auf sich abgebildet, sie ist eine Fixgerade.

Sei X(x | 0) ein beliebiger Punkt der x-Achse.

$$\vec{X} = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{T_X} = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{X'} = \overrightarrow{T_X} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{T_XS} = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-x\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot x\\4\end{pmatrix}$$

d. h. die x-Achse wird auf die Gerade u: $y = 4$ abgebildet.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsgleichung.

Für die affine Abbildung $\vec{X} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{X'} + \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ ist der Verschiebungsanteil als Bild des Ursprungs bereits bekannt. Es ist $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$.

Die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix bedeuten die Bilder der Einheitsvektoren $\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, d. h. es ist nach den Ergebnissen von b(2):

$$\overrightarrow{X'} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\cdot\vec{X} + \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}.$$

d) Berechnen Sie die Fixpunkte der Abbildung.

Der Ansatz $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot x_0\\\frac{3}{2}\cdot y_0+4\end{pmatrix}$ bringt die Lösung

$$x_0 = \frac{1}{2}\cdot x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

$$y_0 = \frac{3}{2}\cdot y_0 + 4 \Leftrightarrow y_0 = -8$$

d. h. Fixpunkt der Abbildung ist der Punkt (0 | –8).

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 04 – Lösung

Eine affine Abbildung Ω ist durch eine Konstruktionsvorschrift definiert:

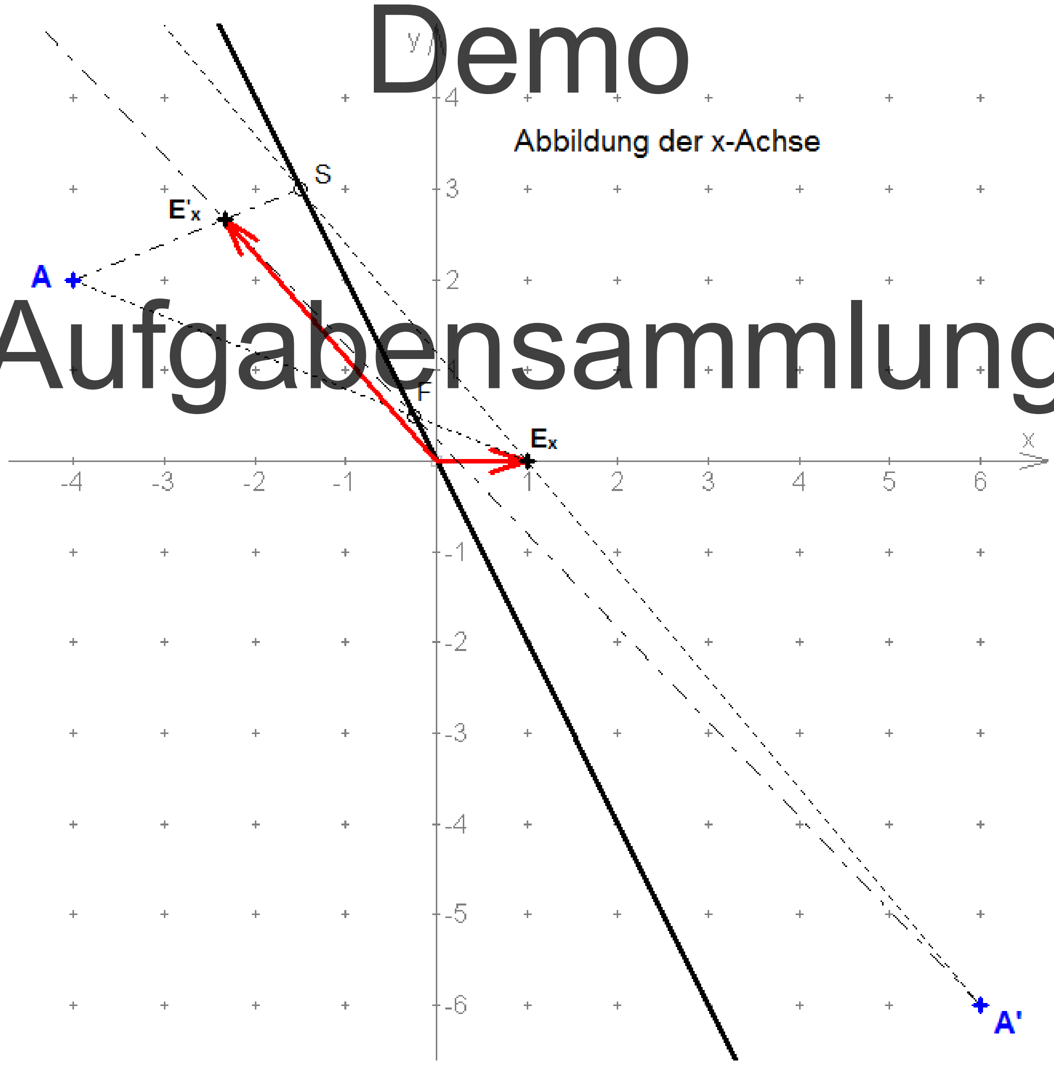
- Gegeben sind die Gerade a mit $y = -2 \cdot x$ und zwei zugeordnete Punkte A(–4 | 2) und A'(6 | –6).

  Einem Punkt P wird nach der folgenden Vorschrift ein Bildpunkt P' zugeordnet:

- Der Schnittpunkt der Geraden AP mit a sei F.
- Der Schnittpunkt der Geraden A'P mit a sei S.
- P' ist der Schnittpunkt der Geraden A'F und AS.

a) Konstruieren Sie die Bilder der Koordinatenachsen.

Für alle Punkte $P_a \in a$ gilt laut Konstruktionsvorschrift: $P_a = F = S$, d. h. die Gerade a ist eine Fixpunktgerade, insbesondere ist der Ursprung ein Fixpunkt.



Zur Konstruktion der u-Achse – des Bildes der x-Achse – wird der Punkt $E_x(1 \mid 0)$ abgebildet.

$$a: \qquad \vec{x} = q \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g_{A,E_x}: \qquad \vec{x} = \vec{A} + p \cdot \overrightarrow{AE_x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\{F\} = a \cap g_{A,E_x}: p \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & -4 \\ 0 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$g_{A',E_x}: \qquad \vec{x} = \vec{A'} + p \cdot \overrightarrow{A'E_x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\{S\} = a \cap g_{A',E_x}: p \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & 6 \\ -6 & 2 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow q = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das Bild E'_x ist der Schnittpunkt der Geraden A'F und AS:

$$g_{A,S}: \vec{x} = \vec{A} + p^* \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + p^* \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g_{A',F}: \vec{x} = \vec{A'} + q^* \cdot \overrightarrow{A'F} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} + q^* \cdot \begin{pmatrix} -\frac{25}{4} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ 26 \end{pmatrix}$$

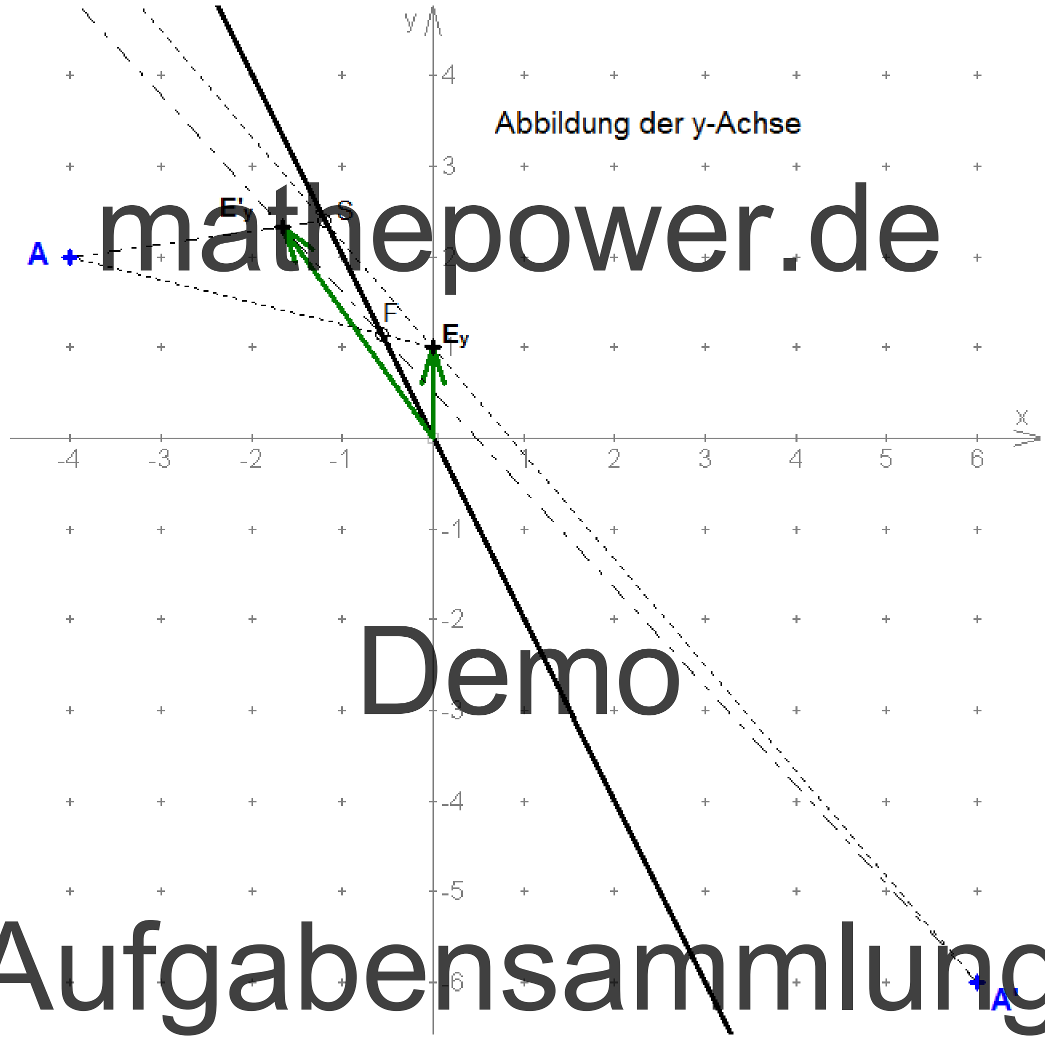
$$g_{A,S} \cap g_{A',F}: \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ 26 \end{pmatrix} \Rightarrow p \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Das LGS wird gelöst durch $p = q = \frac{1}{3}$, d. h. $\overrightarrow{E'_x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$

Ergebnis:

Der Einheitsvektor $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird auf den Vektor $\vec{i'} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ abgebildet. Das Bild der x-Achse – die u-Achse – hat die Gleichung $u: y = -\frac{8}{7} \cdot x$.

Zur Konstruktion der v-Achse – des Bildes der y-Achse – wird der Punkt $E_y(0 \mid 1)$ abgebildet.



$$a: \qquad \vec{X} = q \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g_{A,E_y}: \qquad \vec{X} = \vec{A} + p \cdot \overrightarrow{AE_y} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\{F\} = a \cap g_{A,E_y}: p \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \quad \left(\begin{array}{cc|c} -4 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{4}{7} \qquad \Rightarrow \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

$$g_{A',E_y}: \qquad \vec{X} = \vec{A'} + p \cdot \overrightarrow{A'E_y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\{S\} = a \cap g_{A',E_x}: p \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \; ; \quad \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -1 & 6 \\ -7 & 2 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow q = \frac{6}{5} \qquad \Rightarrow \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

Das Bild E'_y ist der Schnittpunkt der Geraden A'F und AS:

$$g_{A,S}: \vec{X} = \vec{A} + p * \cdot \overrightarrow{AS} \quad = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + p * \cdot \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{A',F}: \vec{X} = \vec{A'} + q * \cdot \overrightarrow{A'F} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} + q * \cdot \begin{pmatrix} -\frac{46}{7} \\ \frac{50}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -23 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$g_{A,S} \cap g_{A',F}: \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -23 \\ 25 \end{pmatrix} \Rightarrow p \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Das LGS wird gelöst durch $p = q = \frac{1}{3}$, d. h. $\overrightarrow{E'_y} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Ergebnis:

Der Einheitsvektor $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird auf den Vektor $\vec{j}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ abgebildet. Das Bild der y-Achse – die v-Achse – hat die Gleichung $v: y = -\frac{7}{5} \cdot x$.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsgleichung der Abbildung Ω und zeigen Sie, dass diese flächentreu ist.

(Ergebnis: $\vec{X'} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$)

Die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix bedeuten die Bilder der Einheitsvektoren $\vec{i}$ und $\vec{j}$, deshalb ergibt sich aus den Ergebnissen von a) unmittelbar die Abbildungsgleichung

$$\Omega: \vec{X'} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$$

Die Abbildung ist flächentreu, wenn die Determinante der Abbildungsmatrix die Werte 1 oder –1 annimmt.

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \cdot (-49 + 40) = -1$$

c) Bestimmen Sie die Fixpunktgerade und die Fixgerade(n) der Abbildung Ω.

Der Ansatz $\vec{X'} = \vec{X}$ führt auf das homogene Gleichungssystem

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das System besitzt eine ∞^1-Lösungsmenge, die Gerade a: $y = -2 \cdot x$ ist ***Fixpunktgerade***.

Eine Abbildung hat ***Fixgeraden*** genau dann, wenn sie ***Eigenvektoren*** $\vec{u}$ besitzt, diese werden auf kollineare Vektoren abgebildet, d. h. für Eigenvektoren gilt

$$\vec{u}' = k \cdot \vec{u} \;\Rightarrow\; k \cdot \vec{u} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} (-7-3\cdot k)\cdot u_1 - 5\cdot u_2 = 0 \\ 8\cdot u_1 + (7-3\cdot k)\cdot u_2 = 0 \end{cases}$$

Damit das homogene LGS Lösungen hat, muss die Determinante verschwinden, d. h.

$$\begin{vmatrix} -7-3\cdot k & -5 \\ 8 & 7-3\cdot k \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; (-7-3\cdot k)\cdot(7-3\cdot k) + 40 = 0 \;\Leftrightarrow\; 9\cdot k^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow\; k = -1 \vee k = 1$$

Die Lösungen dieser ***charakteristischen Gleichung*** sind die ***Eigenwerte*** der Abbildung.

$$k = -1 \;\Rightarrow\; -4\cdot u_1 - 5\cdot u_2 = 0 \;\wedge\; 8\cdot u_1 + 10\cdot u_2 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u} = p\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$k = 1 \;\Rightarrow\; -10\cdot u_1 - 5\cdot u_2 = 0 \;\wedge\; 8\cdot u_1 + 4\cdot u_2 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u} = q\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

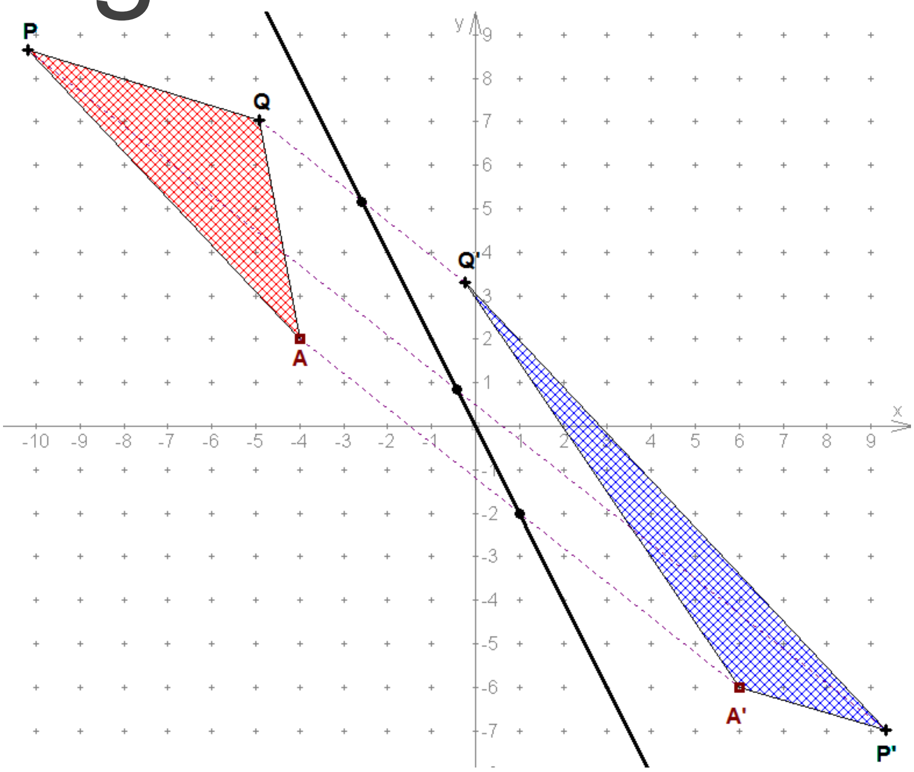
Für $k = 1$ ergibt sich der Richtungsvektor der Fixpunktgeraden a.

Für $k = -1$ erhält man den Richtungsvektor der Verbindungsgeraden AA‘.

Da die Gerade AA‘ die Fixpunktgerade a schneidet, handelt es sich bei der Abbildung Ω um eine ***perspektive Affinität***, und da außerdem die Gerade a die Verbindungsstrecke AA‘ halbiert, ist die Abbildung Ω sogar eine ***Schrägspiegelung***.

$$\overrightarrow{M_{A,A'}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{A} + \vec{A}'\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt $M_{A,A'}$ liegt auf der Geraden a.



d) Bestimmen Sie die Gleichung der Achsenspiegelung Σ an der Geraden a.

Allgemein ist die Abbildungsgleichung einer Geradenspiegelung gegeben durch

$$\Sigma : \vec{X}' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \vec{X} + \vec{V}$$

wobei α der Steigungswinkel der Spiegelachse a ist. Da der Ursprung ein Fixpunkt ist, gilt $\vec{V} = \vec{0}$. Mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ gilt

$$\cos 2\alpha = \frac{m_1^2 - m_2^2}{\left|\vec{m}\right|^2} \quad \wedge \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2}{\left|\vec{m}\right|^2}$$

Für die Achse a gilt $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, d. h. $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5} \wedge \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$, also

$$\Sigma : \vec{X}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$$

e) Bilden Sie die Verkettungen $\Sigma * \Omega$ und $\Omega * \Sigma$ und benennen Sie den Zusammenhang der beiden Verkettungen.

$$\Omega * \Sigma : \vec{X}' = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \vec{X} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 41 & 13 \\ -52 & -11 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$\Sigma * \Omega : \vec{X}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{X} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -13 \\ 52 & 41 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$$

Die Abbildungsmatrizen der beiden Verkettungen sind ***invers*** zueinander, d. h. es gilt

$$\Omega * \Sigma : \quad \vec{X}' = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 41 & 13 \\ -52 & -11 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} \Rightarrow \vec{X} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -13 \\ 52 & 41 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}'$$

und umgekehrt.

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} \frac{41}{15} & \frac{13}{15} \\ -\frac{52}{15} & -\frac{11}{15} \end{pmatrix} \cdot \vec{X} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \vec{X}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{41}{15} & \frac{13}{15} \\ -\frac{52}{15} & -\frac{11}{15} \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$$

wobei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{41}{15} & \frac{13}{15} \\ -\frac{52}{15} & -\frac{11}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{41}{15} & \frac{13}{15} \\ -\frac{52}{15} & -\frac{11}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{15} \cdot a - \frac{52}{15} \cdot b & \frac{13}{15} \cdot a - \frac{11}{15} \cdot b \\ \frac{41}{15} \cdot c - \frac{52}{15} \cdot d & \frac{13}{15} \cdot c - \frac{11}{15} \cdot d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{41}{15} \cdot a - \frac{52}{15} \cdot b = 1 \wedge \frac{13}{15} \cdot a - \frac{11}{15} \cdot b = 0 \\ \frac{41}{15} \cdot c - \frac{52}{15} \cdot d = 0 \wedge \frac{13}{15} \cdot c - \frac{11}{15} \cdot d = 1 \end{cases}$$

Die beiden LGS werden gelöst:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 410 & -52 & 15 \\ 13 & -11 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 41 & -52 & 15 \\ 0 & -225 & 195 \end{array}\right) \Rightarrow b = -\frac{13}{15} \wedge a = -\frac{11}{15}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 41 & -52 & 0 \\ 13 & -11 & 15 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 41 & -52 & 0 \\ 0 & -225 & -615 \end{array}\right) \Rightarrow d = \frac{41}{15} \wedge c = \frac{52}{15}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -13 \\ 52 & 41 \end{pmatrix} \qquad \text{q. e. d.}$$

f) Bestimmen Sie die Fixelemente der Verkettungen.

Da beide Einzelabbildungen der Verkettungen jeweils dieselbe Fixpunktgerade besitzen, besitzen auch die Verkettungen die Fixpunktgerade a.

Eine Abbildung hat ***Fixgeraden*** genau dann, wenn sie ***Eigenvektoren*** $\vec{u}$ besitzt, diese werden auf kollineare Vektoren abgebildet, d. h. für Eigenvektoren gilt

$$\vec{u}\,' = k \cdot \vec{u} \;\Rightarrow\; k \cdot \vec{u} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 41 & 13 \\ -52 & -11 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} (41 - 15 \cdot k) \cdot u_1 + 13 \cdot u_2 = 0 \\ -52 \cdot u_1 - (11 + 15 \cdot k) \cdot u_2 = 0 \end{cases}$$

Damit das homogene LGS Lösungen hat, muss die Determinante verschwinden, d. h.

$$\begin{vmatrix} 41 - 15 \cdot k & 13 \\ -52 & -11 - 15 \cdot k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (41 - 15 \cdot k) \cdot (-11 - 15 \cdot k) + 676 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 2 \cdot k + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad k = -1$$

Die Lösungen dieser ***charakteristischen Gleichung*** sind die ***Eigenwerte*** der Abbildung.

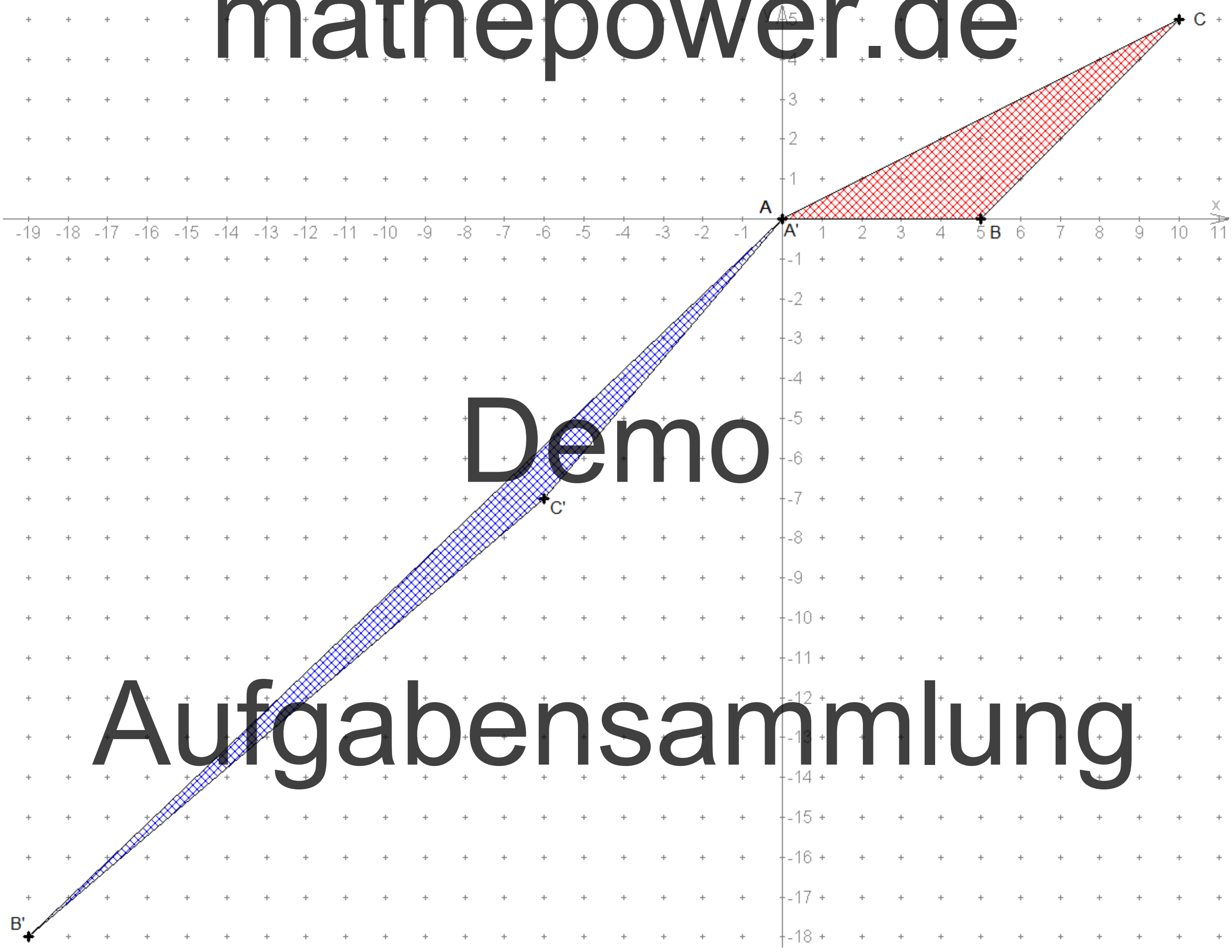
$$k = -1 \;\Rightarrow\; 26 \cdot u_1 + 13 \cdot u_2 = 0 \;\wedge\; -52 \cdot u_1 - 26 \cdot u_2 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u} = p \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für k = −1 erhält man den Richtungsvektor der Fixpunktgeraden a.

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 05 – Lösung

Eine affine Abbildung ist durch drei Punkt A(0 | 0), B(5 | 0) und C(10 | 5) sowie deren Bildpunkte A‘(0 | 0), B‘(–19 | –18) und C‘(–6 | –7) festgelegt.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsgleichung.



Der Ursprung des Koordinatensystems ist ein Fixpunkt der Abbildung, deshalb ist der Verschiebungsanteil in der Abbildungsgleichung der Nullvektor. Aus den anderen beiden Punkten und Bildpunkten erhält man zur Bestimmung der Abbildungsmatrix die folgenden LGSe-:

$$\begin{pmatrix}-19\\-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} \quad\wedge\quad \begin{pmatrix}-6\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 5\cdot a &= -19 & \qquad 5\cdot c &= -18\\ 10\cdot a+5\cdot b &= -6 & \qquad 10\cdot c+5\cdot d &= -7 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a=-\frac{19}{5}\wedge b=\frac{32}{5} \quad\wedge\quad c=-\frac{18}{5}\wedge d=\frac{29}{5}$$

Die Abbildungsgleichung ist $\vec{x}\,'=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-19 & 32\\-18 & 29\end{pmatrix}\cdot\vec{x}$.

b) Untersuchen Sie die Abbildung auf Fixpunkte und Fixgeraden.

Der Ansatz $\overrightarrow{X'} = \vec{X}$ führt auf das homogene Gleichungssystem

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} -19 & 32 \\ -18 & 29 \end{pmatrix}\right)\cdot\vec{X} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 24 & -32 \\ 18 & -24 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das System besitzt eine ∞^1-Lösungsmenge, die Gerade $a: y = \frac{3}{4}\cdot x$ ist ***Fixpunktgerade***.

Eine Abbildung hat ***Fixgeraden*** genau dann, wenn sie ***Eigenvektoren*** $\vec{u}$ besitzt, diese werden auf kollineare Vektoren abgebildet, d. h. für Eigenvektoren gilt

$$\overrightarrow{u'} = k\cdot\vec{u} \;\Rightarrow\; k\cdot\vec{u} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} -19 & 32 \\ -18 & 29 \end{pmatrix}\cdot\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} (-19-5\cdot k)\cdot u_1 + 32\cdot u_2 = 0 \\ -18\cdot u_1 + (29-5\cdot k)\cdot u_2 = 0 \end{cases}$$

Damit das homogene LGS Lösungen hat, muss die Determinante verschwinden, d. h.

$$\begin{vmatrix} -19-5\cdot k & 32 \\ -18 & 29-5\cdot k \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; (-19-5\cdot k)\cdot(29-5\cdot k) + 576 = 0 \;\Leftrightarrow\; k^2 - 2\cdot k + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\; k = 1$$

Die Lösung dieser ***charakteristischen Gleichung*** ist der ***Eigenwert*** der Abbildung.

$$k = 1 \;\Rightarrow\; -24\cdot u_1 + 32\cdot u_2 = 0 \;\wedge\; -18\cdot u_1 + 24\cdot u_2 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u} = p\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für $k = 1$ ergibt sich der Richtungsvektor der Fixpunktgeraden a, d. h. jede Parallele zu der Geraden a ist eine Fixgerade.

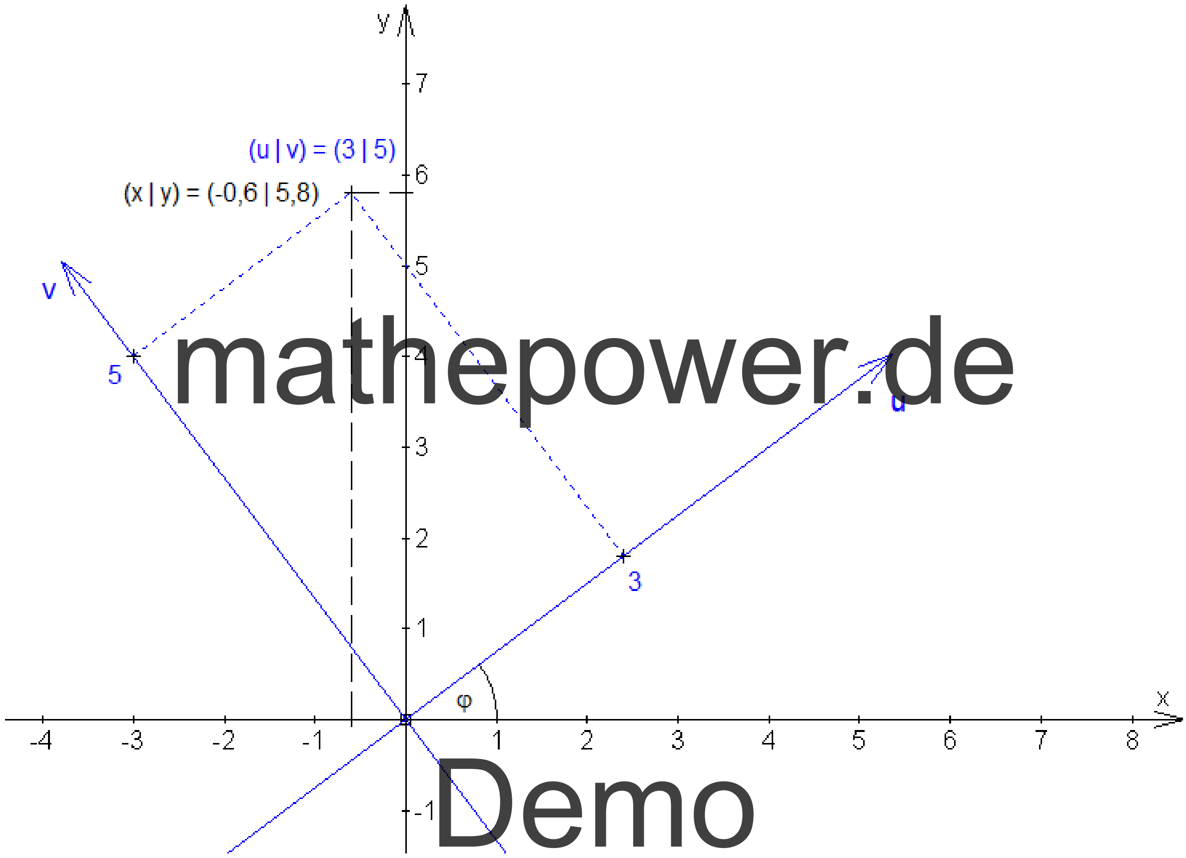
c) Die Gerade a sei nun die u-Achse, die zu a senkrechte Gerade die v-Achse eines kartesischen Koordinatensystems, wobei der positive Teil der y-Achse im 1. Quadranten des u,v-Systems verlaufen soll. Drücken Sie u und v durch x und y aus.

Die Gerade a – und damit die u-Achse – hat die Steigung $m = 0{,}75$, d. h. es gelten die Beziehungen

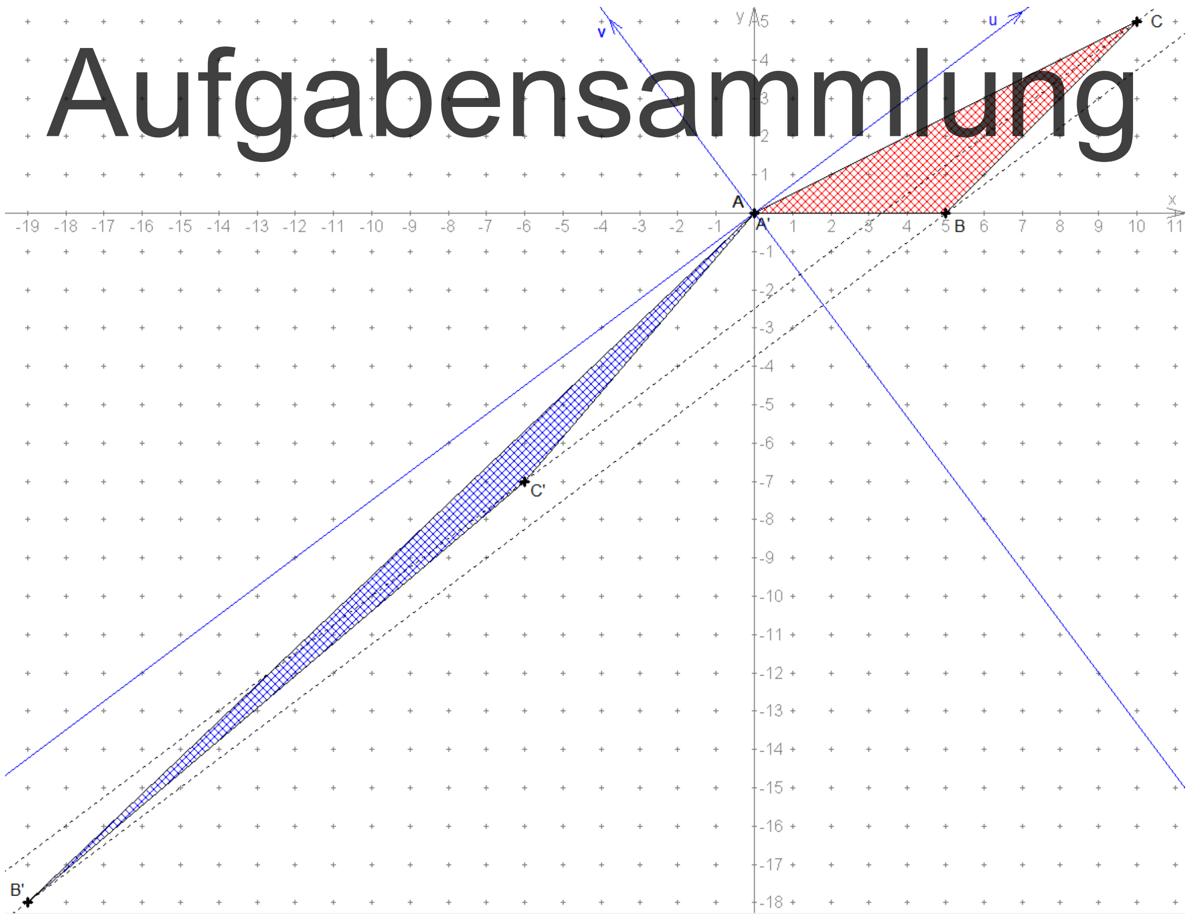
$$\tan\varphi = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \cos\varphi = \frac{4}{5} \;\wedge\; \sin\varphi = \frac{3}{5}.$$

Infolgedessen gilt

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$



d) Überführen Sie die Abbildungsgleichung in das u,v-System, und bestimmen Sie die Art der vorliegenden Abbildung.



Zunächst werden die Koordinaten der Punkte A, B und C im u,v-System berechnet. Man erhält

A ist auch im u,v-System ein Fixpunkt.

$$\overrightarrow{B^*} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{B'^*} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -19 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{C^*} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{C'^*} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Punkten und ihren Bildpunkten erhält man zur Bestimmung der Abbildungsmatrix die folgenden LGSe-:

$$\begin{pmatrix} -26 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} 4\cdot a - 3\cdot b = -26 & & 4\cdot c - 3\cdot d = -3 \\ 11\cdot a - 2\cdot b = -9 & & 11\cdot c - 2\cdot d = -2 \\ \Leftrightarrow a = 1 \wedge b = 10 & \wedge & c = 0 \wedge d = 1 \end{array}$$

Im u,v-System ist die Abbildung gegeben durch

$$\vec{X'} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\vec{X}.$$

Bei der vorliegenden Abbildung handelt es sich um eine Scherung parallel zur Geraden a.

e) Wie verhalten sich die Flächeninhalte des Dreiecks ABC und des Bilddreiecks A'B'C'? Bestimmen Sie das Flächenverhältnis auch direkt aus der Abbildungsgleichung.

Für den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt allgemein:

$$F = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sqrt{1-\cos^2\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sqrt{1-\frac{\left(\vec{a}*\vec{b}\right)^2}{\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}*\vec{b}\right)^2}$$

Mit $\vec{a} = \overrightarrow{A'B'}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{A'C'}$ folgt für den Flächeninhalt des Bilddreiecks:

$$F' = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{685\cdot 85-(240)^2} = 12{,}5 \text{ FE}$$

Entsprechend gilt mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ für den Flächeninhalt des Dreiecks:

$$F = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{25\cdot 125-(50)^2} = 12{,}5 \text{ FE} \quad \text{q. e. d.}$$

Das Flächenverhältnis beträgt also 1. Dieses Verhältnis lässt sich als Determinante der Abbildungsmatrix direkt bestimmen, es gilt

$$\left\| \begin{matrix} -\frac{19}{5} & \frac{32}{5} \\ -\frac{18}{5} & \frac{29}{5} \end{matrix} \right\| = 1$$

Ebenso lässt sich dieses Ergebnis aus der Tatsache folgern, dass die Dreiecke im u,v-System durch eine Scherung, d. h. eine flächentreue Abbildung auseinander hervorgehen. Im u,v-System hätte nur der Flächeninhalt des Originaldreiecks bestimmt werden müssen.

Mit $\vec{a} = \overrightarrow{A^*B^*} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{A^*C^*} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix}$ folgt für den Flächeninhalt des Originaldreiecks:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{25 \cdot 125 - (50)^2} = 12{,}5 \text{ FE}$$

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 06 – Lösung

Durch die Abbildung $\Omega: \vec{X}' = \begin{pmatrix} 1{,}32 & -0{,}24 \\ -2{,}24 & 2{,}68 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$ wird jedem Punkt P der Punkt P‘ zugeordnet.

a) Die Abbildung besitzt eine Fixpunktgerade a. Bestimmen Sie die Gleichung.

Der Ansatz $\vec{X}' = \vec{X}$ führt auf das homogene Gleichungssystem

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}32 & -0{,}24 \\ -2{,}24 & 2{,}68 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -0{,}32 & 0{,}24 \\ 2{,}24 & -1{,}68 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -0{,}32 & 0{,}24 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das System besitzt eine ∞^1-Lösungsmenge, die Gerade $a: y = \frac{4}{3} \cdot x$ bzw.

$a: \vec{X} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist ***Fixpunktgerade***. Der Steigungswinkel ist

$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53{,}13°$.

b) Zeigen Sie, dass die Richtung PP‘ von der Lage von $P \notin a$ unabhängig ist. Ermitteln Sie den Winkel, unter dem sich die Geraden a und PP’ schneiden.

Es sei $\vec{P} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ und $\vec{P}' = \begin{pmatrix} 1{,}32 & -0{,}24 \\ -2{,}24 & 2{,}68 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}32 \cdot x_0 - 0{,}24 \cdot y_0 \\ -2{,}24 \cdot x_0 + 2{,}68 \cdot y_0 \end{pmatrix}$.

Die Gerade $g_{PP'}$ hat dann die Gleichung

$g_{PP'}: y = \frac{-2{,}24 \cdot x_0 + 1{,}68 \cdot y_0}{0{,}32 \cdot x_0 - 0{,}24 \cdot y_0} \cdot (x - x_0) + y_0 = -7 \cdot x + 7 \cdot x_0 + y_0$ bzw.

$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \cdot x_0 + y_0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Der Richtungsvektor der Geraden durch P und P‘ ist von den Koordinaten von P unabhängig. Der Steigungswinkel ist $\beta = \arctan(-7) \approx 98{,}13°$.

Die beiden Geraden schneiden sich unter einem Winkel von 45°.

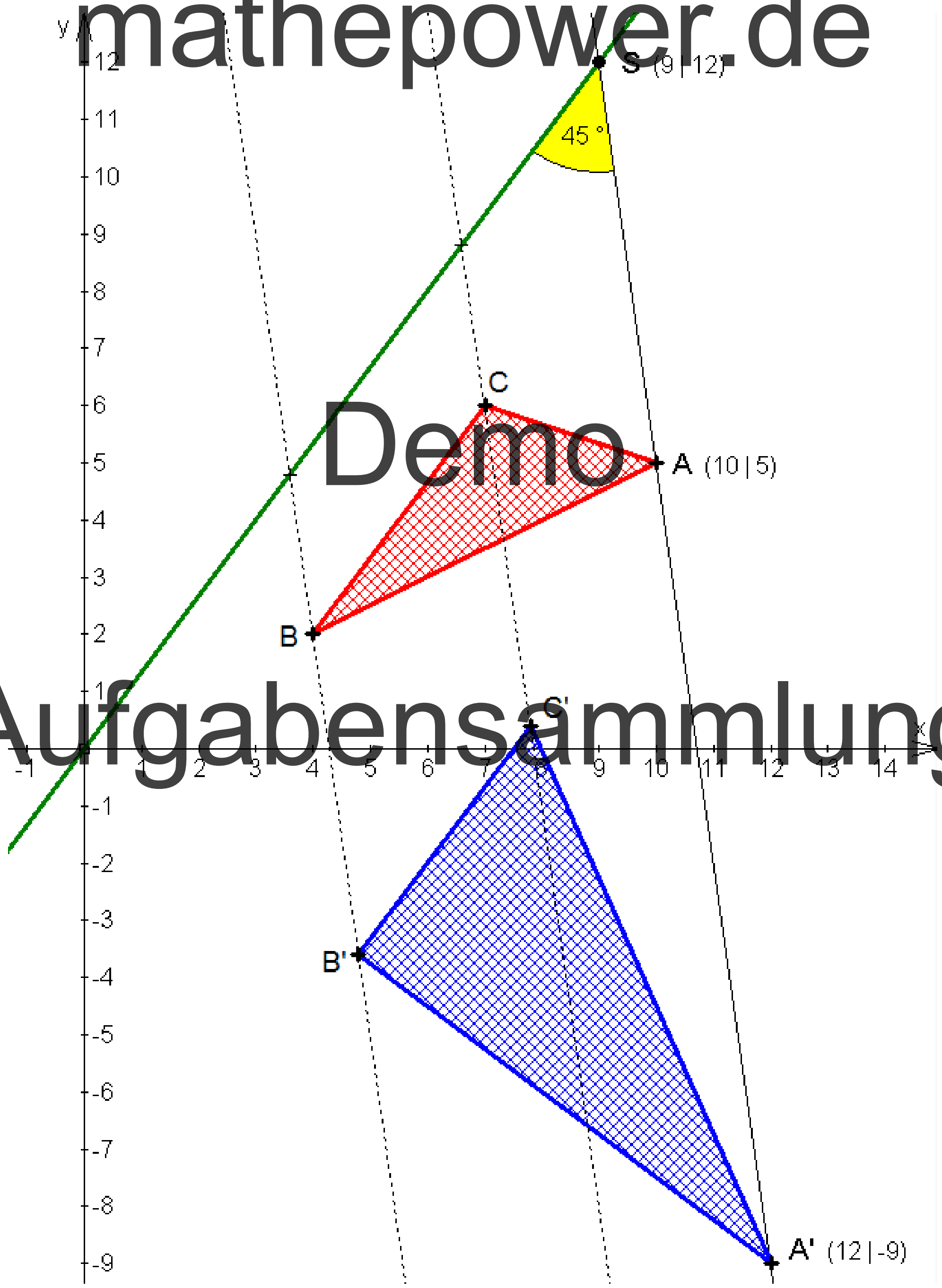
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes A‘ von A(10 | 5) und die Koordinaten des Schnittpunktes S von der Geraden AA‘ und a. Bestimmen Sie das Verhältnis $k = \frac{\left|\overline{A'S}\right|}{\left|\overline{AS}\right|}$.

$\vec{A}' = \begin{pmatrix} 1{,}32 & -0{,}24 \\ -2{,}24 & 2{,}68 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$

$g_{AA'}: y = -7 \cdot x + 75 \quad ; \quad S: \frac{4}{3} \cdot x = -7 \cdot x + 75 \Leftrightarrow x = 9 \Rightarrow S(9\,;12)$

$$\overrightarrow{A'S} = \begin{pmatrix} 3 \\ -21 \end{pmatrix} ; \ \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -21 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\sqrt{450}}{\sqrt{50}} = 3$$

d) Beschreiben Sie die vorliegende Abbildung geometrisch, und bestimmen Sie k aus der Abbildungsgleichung.



Die vorliegende Abbildung besitzt hat folgende Eigenschaften:

- Sie hat eine Fixpunktgerade, und
- die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte sind parallel.

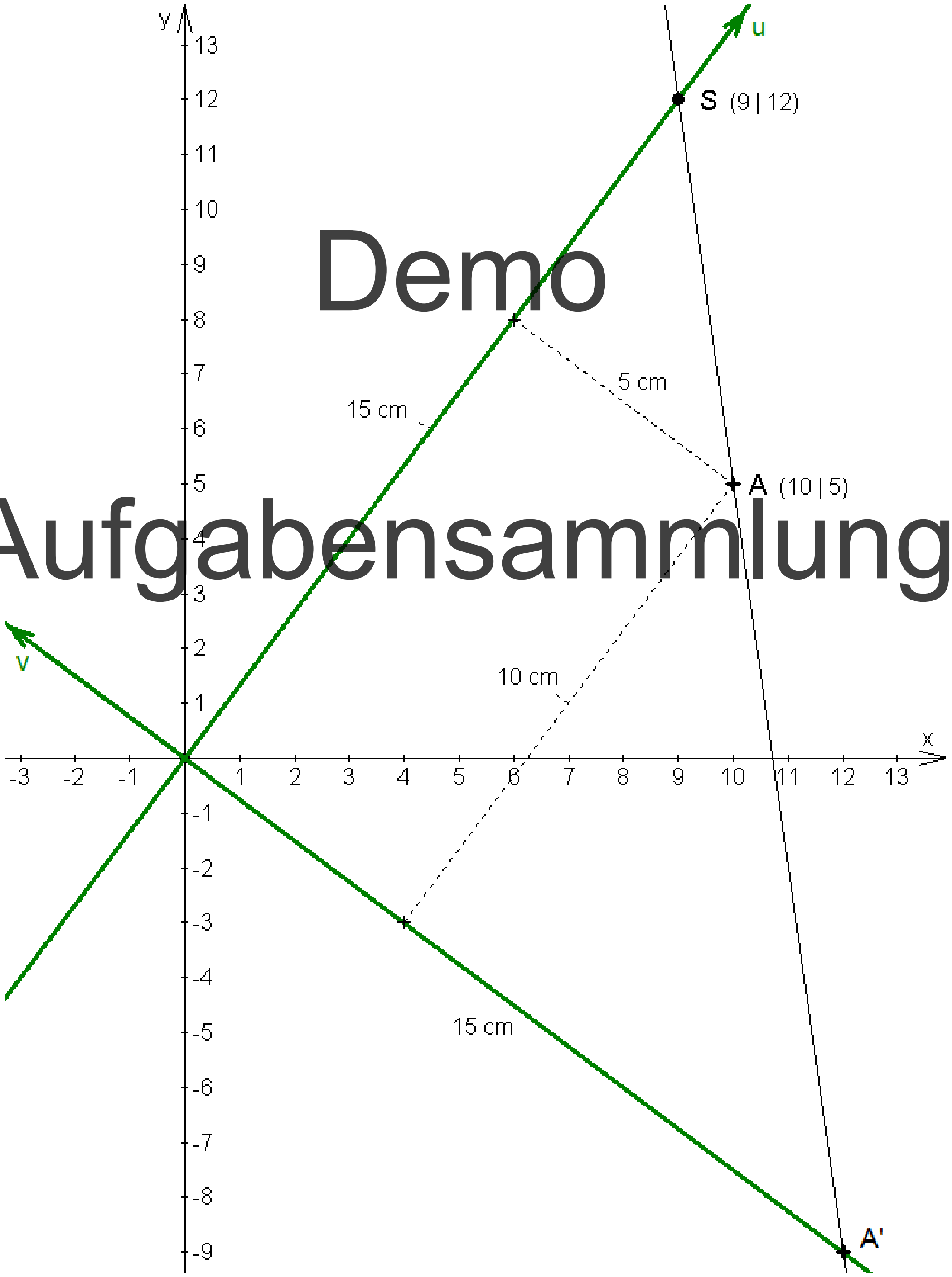
Durch diese Eigenschaften ist eine ***perspektive Affinität*** festgelegt.

Der Affinitätsmaßstab ist $k = 3$, der Umlaufsinn bleibt bei dieser Abbildung also erhalten.

Der Affinitätsmaßstab lässt sich direkt aus der Determinante der Abbildungsmatrix bestimmen.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1{,}32 & -0{,}24 \\ -2{,}24 & 2{,}68 \end{pmatrix} \right\| = 1{,}32 \cdot 2{,}68 - 0{,}24 \cdot 2{,}24 = 3$$

e) Wie lautet die Abbildung in einem kartesischen u,v-System, dass aus dem x,y-System durch eine Drehung um den Ursprung hervorgeht. Dabei soll die u-Achse mit der Geraden a zusammen fallen, und die Koordinate u_S soll positiv sein.



Der Richtungsvektor der Geraden a ist $\overrightarrow{a_R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, d. h. für den Richtungswinkel gilt $\tan\varphi = \frac{4}{3}$ bzw. $\sin\varphi = \frac{4}{5}$ und $\cos\varphi = \frac{3}{5}$. Allgemein werden die Koordinaten eines Punktes $P(x_0 \mid y_0)$ durch die folgende Vorschrift auf die Koordinaten im uv-System umgerechnet:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \text{ d.h. hier } \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten der Punkte A, A‘ und S werden umgerechnet:

$$\begin{pmatrix} u_A \\ v_A \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{A'} \\ v_{A'} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_S \\ v_S \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Abbildung im uv-System gelten die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 10 \cdot a - 5 \cdot b &= 0 \qquad & 10 \cdot c - 5 \cdot d &= -15 \\ 15 \cdot a &= 15 & 15 \cdot c &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a = 1 \wedge b = 2 \quad \wedge \quad c = 0 \wedge d = 3$$

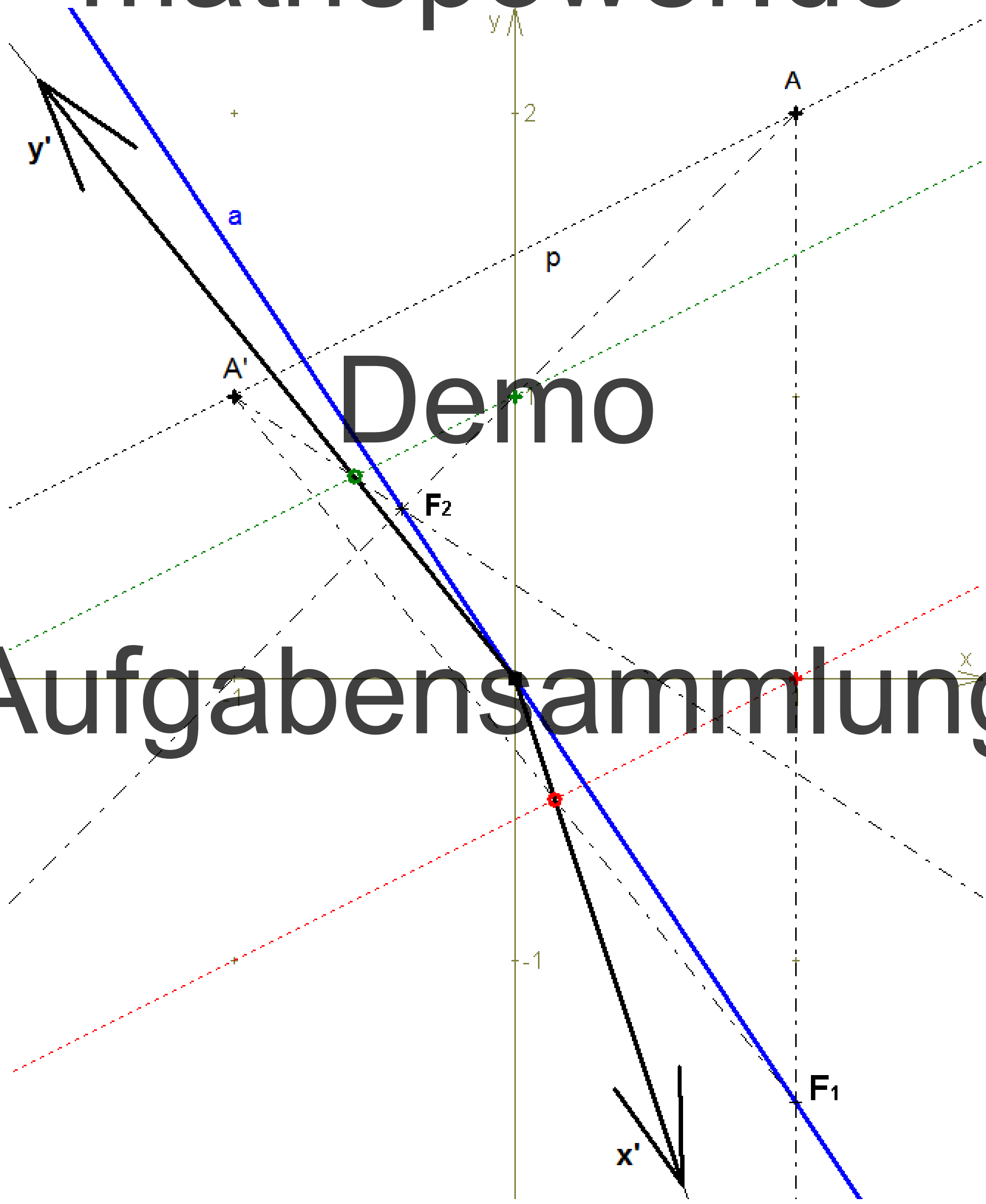
Damit lautet die Abbildungsgleichung im uv-System

$$\Omega_{uv} : \overrightarrow{X'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{X}$$

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 07 – Lösung

Von einer perspektiven Affinität Ω sind die Achse a mit der Gleichung $y = -\frac{3}{2} \cdot x$ und zwei zugeordnete Punkte A(1 | 2) und A‘(–1 | 1) gegeben.

a) Konstruieren Sie die Bilder der Koordinatenachsen und beschreiben Sie die Konstruktion.



Eine ***perspektive Affinität*** hat folgende Eigenschaften, die für die Konstruktion von Bildpunkten ausgenutzt werden:

- Die Punkte einer Geraden a werden auf sich abgebildet. a heißt Affinitätsachse und ist eine Fixpunktgerade.
- Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte sind parallel.

Um die Bilder der Koordinatenachsen zu konstruieren, wird je ein Punkt der x- bzw. y-Achse abgebildet. In der Abbildung sind es die Punkte (1 | 0) bzw. (0 | 1).

Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichnen der Achse a sowie der Punkte A und A‘.
2. Konstruktion der Geraden p durch die Punkte A und A‘.
3. Zeichnen der Parallelen zu p durch den Punkt (1 | 0) bzw. (0 | 1).
4. F_1 bzw. F_2 ist der Schnittpunkt von a und der Geraden durch A und (1 | 0) bzw. A und (0 | 1).
5. Der Bildpunkt von (1 | 0) bzw. (0 | 1) ist der Schnittpunkt der Geraden durch A‘ und F_1 bzw. A‘ und F_2 und der Parallelen zu p durch (1 | 0) bzw. (0 | 1).

b) Bestimmen Sie die Abbildungsgleichung.

Eine perspektive Affinität ist durch die Angabe der Achse a und eines zugeordneten Punktepaares eindeutig bestimmt. Es gilt

$$\overrightarrow{A'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \vec{A} \quad \Rightarrow \quad a_{11} + 2 \cdot a_{12} = -1 \quad \wedge \quad a_{21} + 2 \cdot a_{22} = 1$$

Als Nächstes bildet man einen beliebigen Punkt der Achse ab, z. B F(–1 | 1,5):

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot a_{11} - 3 \cdot a_{12} = 2 \quad \wedge \quad 2 \cdot a_{21} - 3 \cdot a_{22} = -3$$

Aus den beiden Gleichungssystemen ergeben sich die Koeffizienten der Abbildungsmatrix.

$$\alpha: \vec{x}' = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

c) Bestimmen Sie das Bild einer zur Achse a senkrechten Geraden, und berechnen Sie den Winkel zwischen dieser Geraden und ihrem Bild.

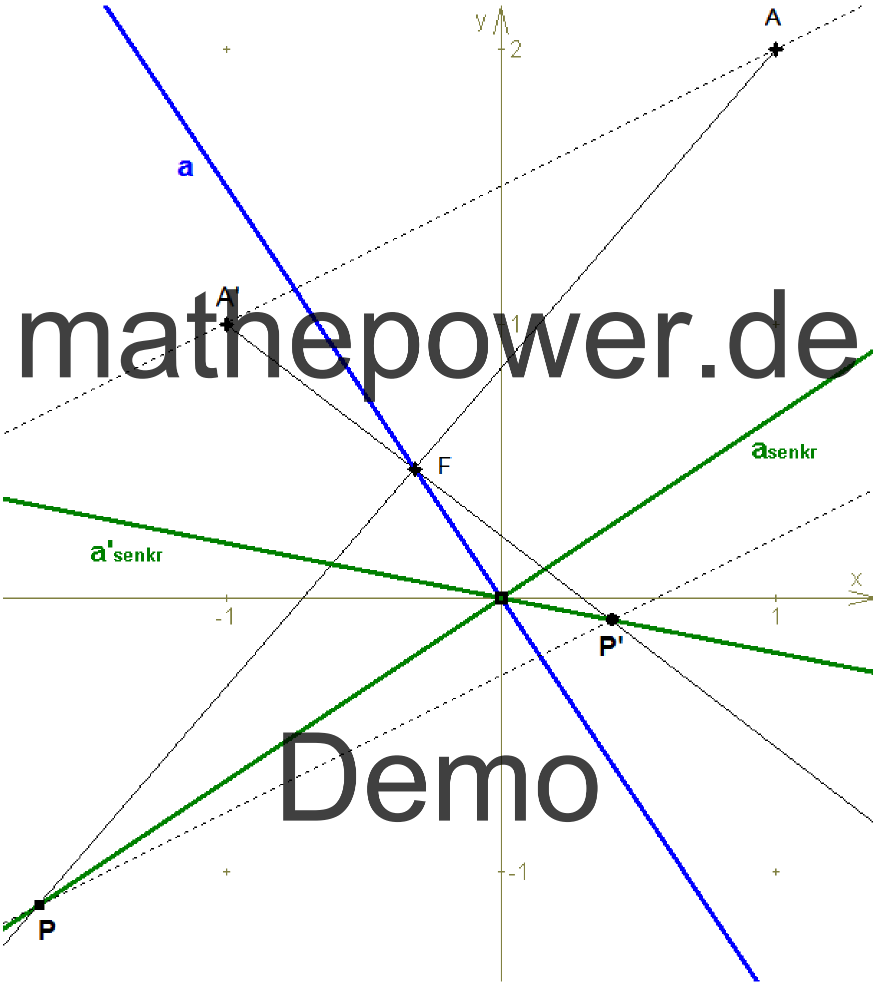
Zeichnen Sie Sie die zur Achse senkrechte Gerade durch den Ursprung und ihr Bild.

$$a_{\perp}: y = \frac{2}{3} \cdot x \quad \Rightarrow \quad P(3 \mid 2) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{P'} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{\perp}': y = -\frac{1}{5} \cdot x$$

Der Winkel zwischen beiden Geraden ist

$$\varphi = \arctan\frac{2}{3} - \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) = 33,69° - (-11,31°) = 45°$$



d) Zerlegen Sie die Scherung in zwei Abbildungen S und Σ, so dass gilt:

$$\Omega \quad = \Sigma * S$$

Hierbei bedeutet S die Achsenspiegelung an a.

Bestimmen Sie die Gleichung und den Typ der Abbildung Σ.

Allgemein ist die Abbildungsmatrix einer Achsenspiegelung an der Achse a mit dem Steigungswinkel α gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{u^2} \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 & 2 \cdot u_1 \cdot u_2 \\ 2 \cdot u_1 \cdot u_2 & -\left(u_1^2 - u_2^2\right) \end{pmatrix}$$

Hierbei bedeutet $\tan\alpha = m = \frac{u_1}{u_2}$. Für die vorliegende Achsenspiegelung gilt

$$S: \vec{X'} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$\Omega = \Sigma * S: \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -5 \cdot a - 12 \cdot b & -12 \cdot a + 5 \cdot b \\ -5 \cdot c - 12 \cdot c & -12 \cdot c + 5 \cdot d \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten der Abbildungsmatrix von Σ sind die Lösungen der Gleichungssysteme

$$-5\cdot a-12\cdot b=\frac{13}{7} \qquad -5\cdot c-12\cdot d=-\frac{39}{7}$$
$$-12\cdot a+\ 5\cdot b=-\frac{52}{7} \qquad -12\cdot c+\ 5\cdot d=\frac{65}{7}$$

$$\Rightarrow \quad a=\frac{43}{91}\ ;\ b=-\frac{32}{91}\ ;\ c=-\frac{45}{91}\ ;\ d=\frac{61}{91}$$

Die Abbildungsgleichung der Abbildung Σ lautet:

$$\Sigma:\vec{X}'=\frac{1}{91}\cdot\begin{pmatrix}43 & -32\\ -45 & 61\end{pmatrix}\cdot\vec{X}$$

Typ der Abbildung Σ:

Die Abbildung ist ebenfalls eine perspektive Affinität mit derselben Achse wie die Abbildung Ω.

Nachweis:

Der Ansatz $\vec{X}=\Sigma\cdot\vec{X}$ führt auf das LGS: $-48\cdot x-32\cdot y=0\ \wedge\ -45\cdot x-30\cdot y=0$,

d. h. alle Punkte, die die Gleichung $3\cdot x+2\cdot y=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}\cdot x$ erfüllen, sind Fixpunkte.

Fixgeraden:

Eine Abbildung hat ***Fixgeraden*** genau dann, wenn sie ***Eigenvektoren*** $\vec{u}$ besitzt, diese werden auf kollineare Vektoren abgebildet, d. h. für Eigenvektoren gilt

$$\vec{u}'=k\cdot\vec{u}\ \Rightarrow\ k\cdot\vec{u}=\frac{1}{91}\cdot\begin{pmatrix}43 & -32\\ -45 & 61\end{pmatrix}\cdot\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{43}{91}-k\right)\cdot u_1-\frac{32}{91}\cdot u_2=0\\ -\frac{45}{91}\cdot u_1+\left(\frac{61}{91}-k\right)\cdot u_2=0\end{cases}$$

Damit das homogene LGS Lösungen hat, muss die Determinante verschwinden, d. h.

$$\begin{vmatrix}\frac{43}{91}-k & -\frac{32}{91}\\ -\frac{45}{91} & \frac{61}{91}-k\end{vmatrix}=0\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{43}{91}-k\right)\cdot\left(\frac{61}{91}-k\right)-\frac{1440}{8281}=0\ \Leftrightarrow\ k^2-\frac{104}{91}\cdot k+\frac{1183}{8281}=0$$

$$\Leftrightarrow\ k=\frac{52}{91}-\frac{39}{91}=\frac{1}{7}\ \vee\ k=\frac{52}{91}+\frac{39}{91}=1$$

Die Lösungen dieser ***charakteristischen Gleichung*** sind die ***Eigenwerte*** der Abbildung.

$$k=\frac{1}{7}\ \Rightarrow\ \frac{30}{91}\cdot u_1-\frac{32}{91}\cdot u_2=0\ \wedge\ -\frac{45}{91}\cdot u_1+\frac{48}{91}\cdot u_2=0\ \Rightarrow\ \vec{u}=p\cdot\begin{pmatrix}16\\15\end{pmatrix}$$

$$k=1\ \Rightarrow\ -\frac{48}{91}\cdot u_1-\frac{32}{91}\cdot u_2=0\ \wedge\ -\frac{45}{91}\cdot u_1-\frac{30}{91}\cdot u_2=0\ \Rightarrow\ \vec{u}=q\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

Für $k=1$ ergibt sich der Richtungsvektor der Fixpunktgeraden a.

Für $k=\frac{1}{7}$ erhält man die Affinitätsrichtung.

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 08 – Lösung

Vorgelegt sind die affinen Abbildungen

$T_1 : \overrightarrow{X'} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $T_2 : \overrightarrow{X'} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$ und

$T_3 : \overrightarrow{X'} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Begründen Sie, dass es sich um Kongruenzabbildungen handelt.

Eine ***Kongruenzabbildung*** liegt vor, wenn sie ***längen- und winkeltreu*** ist.

Längentreue:

Die Bilder der Einheitsvektoren $\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind wieder Einheitsvektoren.

$T_1, T_3 : \overrightarrow{e_x'} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{e_y'} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$T_2 : \quad \overrightarrow{e_x'} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{e_y'} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Winkeltreue:

Auch diese ist bei den drei Abbildungen gegeben, da die Bilder der Einheitsvektoren ebenfalls aufeinander senkrecht stehen.

b) Ermitteln Sie für die gleichsinnige Kongruenzabbildung Drehpunkt und Drehwinkel.

Zur Einordnung der Abbildungen werden die Abbildungsmatrizen mit der allgemeinen Spiegel- bzw. Drehmatrix verglichen.

$S : \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$; $D : \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

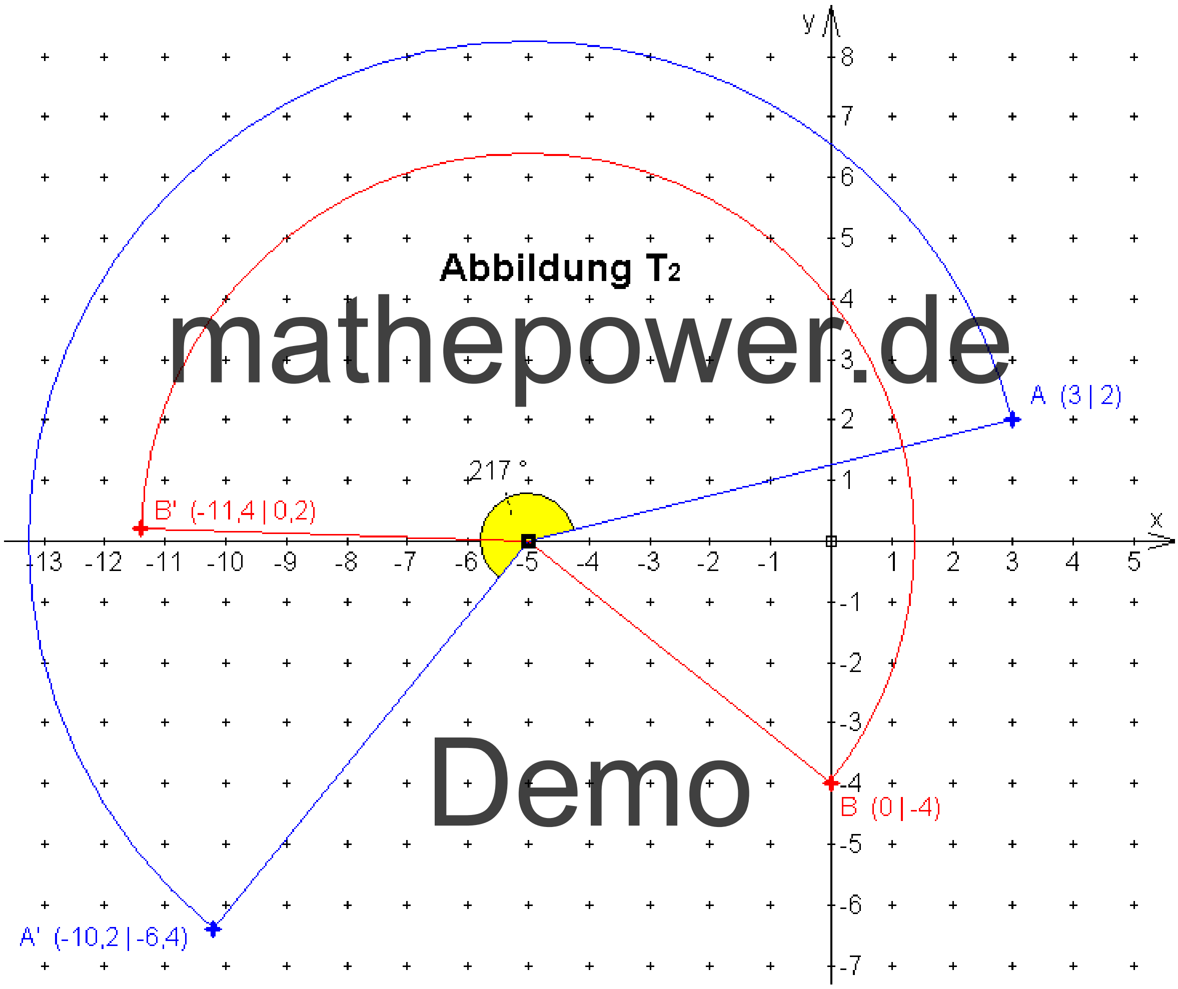
Der Vergleich zeigt, dass die Abbildung T_2 eine ***Drehung*** ist.

Der ***Drehwinkel*** hängt nur von der Abbildungsmatrix ab. Wegen $\cos\varphi < 0$ und $\sin\varphi < 0$ gilt für den Drehwinkel $180° < \varphi < 270°$.

$\sin\varphi = -0{,}6 \Rightarrow \varphi = 180° - (-36{,}87°) = 216{,}87°$

Der ***Drehpunkt*** ist der einzige ***Fixpunkt*** der Abbildung.

Der Ansatz $\vec{X} = \begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}6 \\ -0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$ führt auf das LGS $\begin{matrix} 1{,}8 \cdot x - 0{,}6 \cdot y = -9 \\ 0{,}6 \cdot x + 1{,}8 \cdot y = -3 \end{matrix}$ mit der Lösung $x = -5$ und $y = 0$, der Drehpunkt ist Z(5 | 0).



c) Zeigen Sie, dass sich unter den ungleichsinnigen Kongruenzabbildungen eine Achsenspiegelung und eine Schubspiegelung befindet. Geben Sie jeweils die Spiegelachse und für die Schubspiegelung den Verschiebungsvektor an.

Bestimmung der Achse von T_1 und T_3:

Die Richtung der Spiegelachse hängt nur von der Abbildungsmatrix ab, diese ist bei den Abbildungen T_1 und T_3 gleich.

Wie bereits in b) berechnet, gilt $2 \cdot \alpha = 216{,}87°$, der Richtungswinkel der Spiegelachse ist damit $\alpha = 108{,}44°$.

Unter Benutzung der trigonometrischen Beziehung $\tan\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ erhält man für die Steigung der Achse:

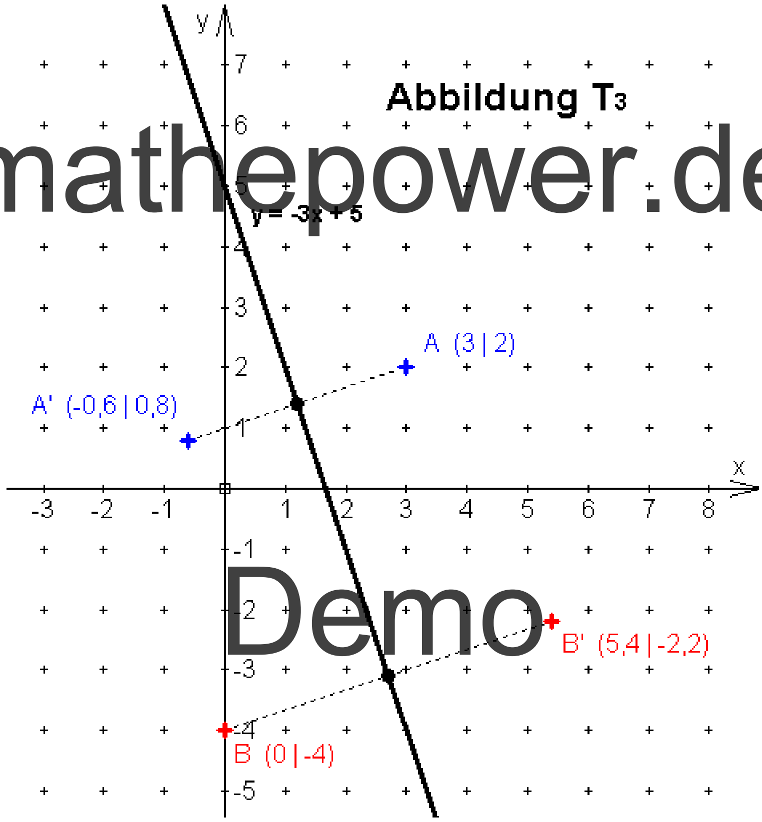
$$\tan\alpha = m = \frac{-0{,}6}{1-0{,}8} = -3 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ (Richtungsvektor).}$$

Bei einer Achsenspiegelung muss der Verschiebungsvektor auf dem Richtungsvektor der Achse senkrecht stehen, das ist für T_3 der Fall.

Die Abbildung T_3 ist eine Achsenspiegelung.

Die Spiegelachse ist die Fixpunktgerade.

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} -0,8 & -0,6 \\ -0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1,8 \cdot x + 0,6 \cdot y = 3 \\ 0,6 \cdot x + 0,2 \cdot y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = -3 \cdot x + 5$$



Bestimmung des Verschiebungsanteils von T_1:

Der Verschiebungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird in Komponenten bezüglich $\vec{u}$ und $\vec{u}$ zer-

legt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow s = \frac{6}{5} \wedge t = \frac{2}{5}$$

$$T_1 : \vec{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0,8 & -0,6 \\ -0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{pmatrix} 3,6 \\ 1,2 \end{pmatrix}}_{\text{Achsenspiegelung}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0,4 \\ -1,2 \end{pmatrix}}_{\text{Verschiebung in Richtung von } \vec{u}} .$$

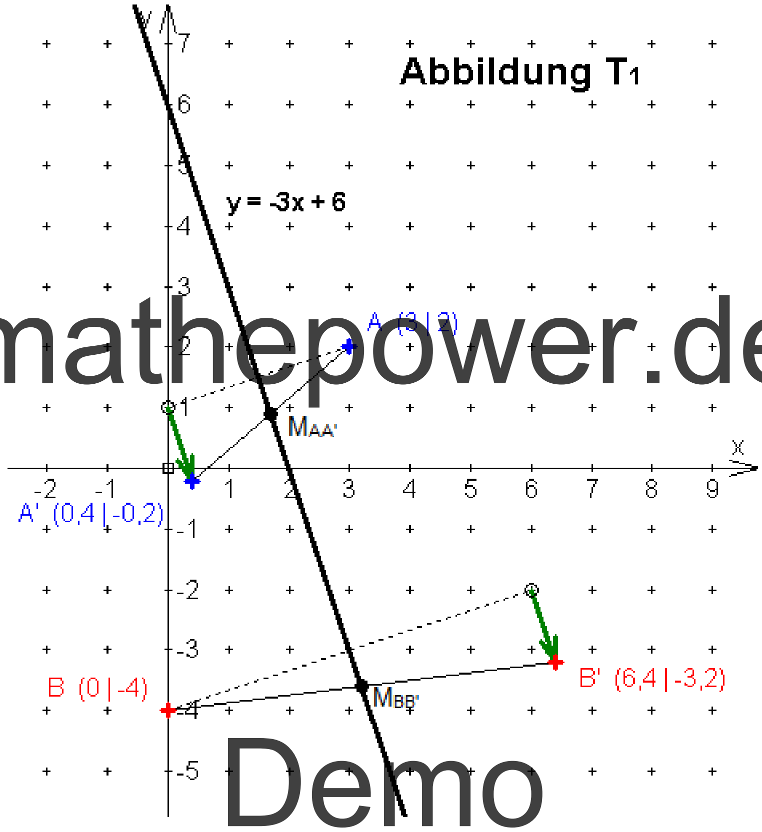


Abbildung T1
y = -3x + 6
A (3 | 2)
A' (0,4 | -0,2)
M AA'
B (0 | -4)
B' (6,4 | -3,2)
M BB'
x
y

Abbildungen und Transformationen – Aufgabe 09 – Lösung

Vorgelegt sind die Schrägspiegelung an der x-Achse

$$\Phi: \vec{X'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} \quad \text{und die Abbildung} \quad \Sigma: \vec{X'} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}.$$

a) Zeigen Sie, dass Σ eine Schrägspiegelung mit derselben Affinitätsrichtung wie Φ ist. Bestimmen Sie die Achse und Affinitätsrichtung von Φ.

Zur Bestimmung der Affinitätsrichtung von Φ wird ein zugeordnetes Punktepaar ausgewählt.

$$\Phi: P(0|1) \Rightarrow \vec{P'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die Geraden mit $y = -2x + k$ sind Fixgeraden.

Eine ***Schrägspiegelung*** hat folgende Eigenschaften:

- Es existiert genau eine ***Fixpunktgerade***, die Spiegelachse.
- Die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte sind ***Fixgeraden***.
- Die Spiegelachse ***halbiert*** die Verbindungsstrecke zugeordneter Punkte.

Bestimmung der Achse von Σ:

$$\vec{X} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot y = 0 \\ \frac{4}{3} \cdot x - \frac{4}{3} \cdot y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Achse}: y = x$$

Bestimmung der Affinitätsrichtung von Σ:

$$\Sigma: P(0|1) \Rightarrow \vec{P'} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Die Geraden mit $y = -2x + k$ sind Fixgeraden.

Bestimmung des Mittelpunktes der Verbindungsstrecke zugeordneter Punkte:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \vec{P'} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot y \\ \frac{4}{3} \cdot x - \frac{1}{3} \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_{PP'}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{P} + \vec{P'} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y \\ \frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Mittelpunkte liegen auf der Achse.

Die Abbildung Σ ist eine Schrägspiegelung.

b) Bestimmen Sie die Abbildung $\Sigma * \Phi$, und konstruieren und berechnen Sie das Bild des Dreiecks ABC mit A(–4 | –1), B(2 | 0) und C(0 | 6).

$$\Sigma * \Omega:\ \overrightarrow{X'} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\vec{X} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\vec{X}$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix}-10\\ -2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{A'} = \begin{pmatrix}-2\frac{2}{3}\\ -16\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix}6\\ -4\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{B'} = \begin{pmatrix}3\frac{1}{3}\\ 1\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix}-5\\ -1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{C'} = \begin{pmatrix}-1\frac{1}{3}\\ -8\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

c) Zeigen Sie, dass $\Sigma * \Phi$ eine Scherung ist.

Bestimmung von Fixpunkten:

$$\vec{X} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\vec{X} \Rightarrow \begin{cases}-\frac{2}{3}\cdot x - \frac{1}{3}\cdot y = 0\\ \frac{4}{3}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot y = 0\end{cases} \Rightarrow \text{Achse}: y = -2\cdot x$$

Bestimmung von Fixgeraden:

$$\Sigma * \Omega: P(x|y) \Rightarrow \overrightarrow{P'} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\cdot x - \frac{1}{3}\cdot y\\ \frac{4}{3}\cdot x + \frac{5}{3}\cdot y\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\cdot x - \frac{1}{3}\cdot y\\ \frac{4}{3}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot y\end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}\cdot x + \frac{1}{3}\cdot y\right)\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$$

Die Affinitätsrichtung stimmt mit der Richtung der Achse überein. Jede Parallele zur Achse ist eine Fixgerade.

Bestimmung des Affinitätsverhältnisses:

$$\left\|\begin{matrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3}\end{matrix}\right\| = 1.$$ Die Abbildung ist flächentreu.

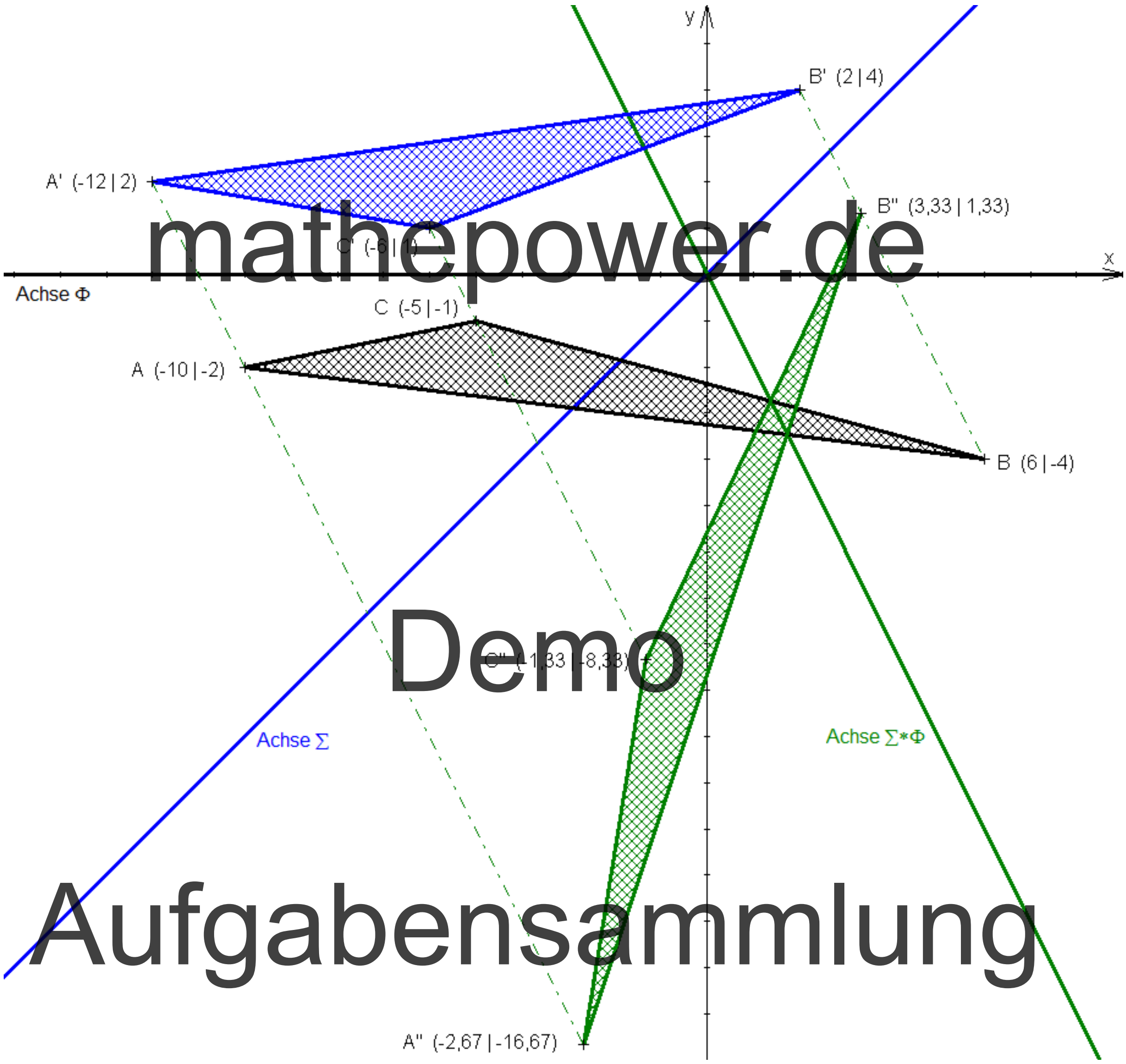
Die Ergebnisse besagen, dass die Abbildung $\Sigma * \Phi$ eine ***Scherung*** ist.

In der Abbildung bedeuten:

Schrägspiegelung Φ Schrägspiegelung Σ

$\triangle ABC \quad \rightarrow \quad \triangle A'B'C' \quad \rightarrow \quad \triangle A''B''C''$

Scherung $\Sigma * \Phi$



d) Bestimmen Sie den Scherungswinkel.

Zur Bestimmung des Scherungswinkels wird von einem beliebigen Punkt das Lot auf die Achse gefällt. Man erhält den Lotfußpunkt F.

F wird mit dem Bildpunkt verbunden.

Der Scherungswinkel ist der Winkel $\sphericalangle(PFP')$.

Das Lot durch F hat die Gleichung $y=\frac{1}{2}\cdot x+3$, der Schnittpunkt des Lotes mit der Achse ist $F\left(-\frac{6}{5};\frac{12}{5}\right)$.

$$\cos\sphericalangle(AFA') = \frac{\overrightarrow{FA} * \overrightarrow{FA'}}{\left|\overrightarrow{FA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{FA'}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 22 \\ 11 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 11 \\ 143 \end{pmatrix}}{\sqrt{605} \cdot \sqrt{20570}} \approx 0{,}5145 \Rightarrow \sphericalangle(AFA') \approx 59{,}036°$$